ベーシックレベル数学Ｂを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ ベーシックレベル数学Ｂの講座へ。この講座は

「数学Ｂを，用語の意味や公式のなりたちについて理解するところから学習したい」

という人に適した講座となっています。

数学Ｂでは，日常や社会において数学を活用する際に基礎的な役割を果たす内容を学習します。この講座では，算数や中学校の数学や数学Ⅰ・Ａの学習で得た知識や経験を時に振り返りながら，新たな知識や考え方を，１つ１つ，丁寧に，あなたと一緒に積み重ねていきます。

予習は必要ありません。「講義動画」で，いちから説明します！

テキストの使い方，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座を受講いただくことで，学校の授業の理解をより深めたり，学校から課された宿題を解きながらそこで問われている内容を確認したり，といったことが可能になります。しかし，この講座で扱う内容は，決して簡単ではありません。だからこそ，あなたがこの講座を通じて数学Ｂと本気で向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業しています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで，講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に習った知識を使うことで，その意味がわかる，というのも数学ならではですし，気になって前に戻り改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。

ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　数列

第１講　数列，等差数列
PART1　数列
PART2　等差数列
PART3　等差数列の一般項
PART4　等差数列の和

第２講　等比数列
PART1　等比数列
PART2　等比数列の一般項
PART3　等比数列の和

第３講　和の記号Σ，階差数列
PART1　和の記号Σ
PART2　自然数の和の公式，Σの性質
PART3　自然数の２乗の和の公式
PART4　階差数列と一般項

第４講　いろいろな数列の和
PART1　数列の和と一般項
PART2　分数で表された数列の和

第５講　漸化式と数学的帰納法
PART1　漸化式
PART2　漸化式と一般項
PART3　$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式
PART4　数学的帰納法

第２章　統計的な推測

第６講　確率分布
PART1　確率変数と確率分布
PART2　確率変数の期待値
PART3　確率変数の分散と標準偏差
PART4　確率変数の変換

第７講　確率変数の和と積
PART1　確率変数の和の期待値
PART2　独立な確率変数

第８講　二項分布
PART1　二項分布
PART2　二項分布の期待値，分散，標準偏差

第９講　正規分布
PART1　連続分布
PART2　正規分布
PART3　確率変数の標準化
PART4　二項分布の正規分布による近似

第 10 講　統計的な推測
PART1　母集団と標本
PART2　標本平均の分布
PART3　母平均の推定
PART4　仮説検定

講座の受講の仕方

ここでは,効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い,実力を伸ばしていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとにいくつかの PART（パート）に分かれています。

各 PART は，次のような項目で構成されています。

「要点」

⇒　その PART で習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ち

「講義問題」（1，2など）

⇒　「要点」で学んだことを確認する問題

「Point Pickup」

⇒　「要点」で学んだことをベースに，知識を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「要点」「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。ある講に含まれる PART の一部または全部が未習，または理解が不十分の状態で講義を受講いただいても，まったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら,テキストと筆記用具を手元におき,動画を再生してください。そして,真剣に受講して,講師がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれる PART 内の動画は，複数のチャプターに分かれています。

（例）　第 1 講　数列，等差数列

PART2　等差数列　…　【要点整理①】・【要点整理②】・【問題解説】

それぞれの PART における主な受講の流れを説明します。

(1)　【要点整理】のチャプターで，「要点」の内容を解説します。この PART で習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ちを解説します。

必要なことは予めテキストに記載してあります。その上で，一部「穴埋め」や「記述」が必要な部分があります。講師の話に全力で耳を傾け，テキストを完成させましょう。

⑵　【問題解説】のチャプターで，1，2，3，4といった「講義問題」を解説します。

まずは，「Point Pickup」にて，「要点」を通じて習得したことを整理します。【要点整理】と同様，一部「穴埋め」や「記述」となっています。

次に，「Point Pickup」で整理した知識や考え方を元に，実際に問題を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一次停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

さらに，解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照して，どこに止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「要点」→「Point Pickup」→「講義問題」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分の受講時間となります。

各講に含まれるすべての PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は, PART 単位の受講でも構いません。また, 週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

- **「新しい知識や考え方を知って，思考の幅を広げる」**
- **「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」**
- **「問題が解けるようになることがゴールではなく，前提となる知識・考え方を学ぶ」**

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれませんが, 安心してください。この講座は, いつでも画面を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味を持つのかを考えること，必要なら戻って何度も聞くこと。焦る必要はありません。そして, 講座の受講を進めていくうちに, 感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう１つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできないんだ……」は厳禁！

だということです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気付いていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この PART から何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずは【問題解説】の動画を，それでも思い出せない場合は【要点整理】の動画を見直してみましょう。記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学んだことを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその講の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに**「確認問題」**を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだ知識・考え方を確認することができる問題セットとなっていますので，この PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

解き終えたら，「別冊解答」を見て，解き方をチェックしてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，使う練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学Ｂの世界観が少しずつ見えてくるようになってきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 15 分～ 30 分。それを，どこの曜日のどの時間帯に何 PART（何講）受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。学校で授業を受ける時間と同じように，時と場所を変えて『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ｂと本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気付き，それが「自信」につながります。

この「ベーシックレベル数学Ｂ」は，あくまで数学Ｂの「入門講座」です。入門は，簡単という意味ではなく，その先に進むために欠かすことのできない「作法」を身に付ける，ということです。受講後は，**「高 1・高 2 スタンダードレベル数学Ｂ」**に進んでみてください。自分の知識がどのように活用できるのか，それを知れば，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に広がる数学Ｂの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

[MEMO]

第1講　数列，等差数列

PART1　数列

要点①　数列

「数列」… 数を一列に並べたもの

例　正の偶数を小さい順に並べた数列

2，4，6，8，10，……　　……①

12 の正の約数を小さい順に並べた数列

1，2，3，4，6，12　　……②

数列における各数を「　」という。最初の項から順に「第1項」,「第2項」,「第3項」, ……といい，n 番目の項を「　　」という。とくに，第1項を「　」という。

例　数列①の初項は　，数列②の第3項は　である。

数列①のように，項が限りなく続く数列を「無限数列」といい，数列②のように項の個数が有限である数列を「有限数列」という。有限数列の項の個数を「　」，最後の項を「　」という。数列②の項数は　，末項は　である。

数列は一般的に

a_1，a_2，a_3，……，a_n，……

のように添字をつけて表す。この添字は，その項が数列の第何項であるかを表す。例えば a_5 は第5項を表す。また，この数列を　　と表すことがある。

数列①を $\{a_n\}$ とすると，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は

$a_n =$

のように n の式で表すことができる。この式を用いると

$a_1 = 2\cdot\quad = 2$，$a_2 = 2\cdot\quad = 4$，$a_{10} = 2\cdot\quad = 20$

のように，数列の各項を求めることができる。

$a_n = 2n$ のように, 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n の式で表したものを数列 $\{a_n\}$ の「　　」という。

例　一般項が $a_n = 2^n$ である数列 $\{a_n\}$ について

第3項は　　　　，第7項は

[MEMO]

1 (1) 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第5項までを求めよ。

(i) $a_n=2n-3$　　(ii) $a_n=2^{n-1}$

(2) 数列 1，-2，4，-8，16 の初項，末項，項数をいえ。

Point Pickup

数列 $\{a_n\}$ の一般項から各項を求める

第●項は，一般項を表す式の n に $n=$●を代入して求める。

第 1 講 PART1 確認問題

1 一般項が $3n-1$ で表される数列の初項は [ア]，第3項は [イ] である。

2 一般項が $n(n+1)$ で表される数列において，初項は [ウ]，第5項は [エオ] である。

3 数列1，3，5，7，9，11，13において，初項は [カ]，末項は [キク]，項数は [ケ] である。

PART2 等差数列

要点 ① 等差数列

正の奇数を小さい順に並べた数列 1, 3, 5, 7, 9, ……は，初項　に次々に　を加えて得られる。

また，10 に次々に -3 を加えると，次の数列が得られる。

10,　,　,　,　　,……

このように，初項 a に一定の数 d を次々に加えて得られる数列を「　　　　」といい，一定の数 d を「　　」という。

例 初項 2，公差 3 の等差数列は

である。

要点 ② 等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ について

$a_1=a$

$a_2=a_1+d=\quad+d$

$a_3=a_2+d=(\qquad)+d=a+2d$

$a_4=a_3+d=(\qquad)+d=a+3d$

$\vdots$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$（各項に $+d$ を加えて次の項）

と表され，一般に次のことが成り立つ。

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d$$

例 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=\quad+(n-1)\cdot\qquad$ すなわち　$a_n=3n-1$

第 10 項は　$a_{10}=$

※等差数列 $\{a_n\}$ において，次の関係が成り立つ。

$a_{n+1}=a_n+d$　すなわち　$a_{n+1}-a_n=d$

[MEMO]

2 (1) 初項 -2，公差3の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項と第20項を求めよ。

(2) 次の等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公差 d を求め，一般項を求めよ。

(i) 3，8，13，18，……　　(ii) 19，12，5，-2，……

Point Pickup

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

等差数列の公差 d は，隣り合う2項の「差」である。

第1講　PART2 確認問題

1 初項1，公差4の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$a_n=$ [ア] $n-$ [イ] である。

また，第10項は [ウエ] である。

2 等差数列 $\{a_n\}$ が，

4，7，10，13，……

で与えられるとき，その初項は [オ]，公差は [カ] である。

また，一般項は，$a_n=$ [キ] $n+$ [ク] である。

3 等差数列 $\{a_n\}$ が，

10，6，2，-2，……

で与えられるとき，その初項は [ケコ]，公差は $-$ [サ]

である。

また，一般項は，$a_n=-$ [シ] $n+$ [スセ] である。

PART3　等差数列の一般項

要点 ①　与えられた 2 項から等差数列の一般項を求める

第 3 項が 7，第 10 項が 28 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

初項を　，公差を　とすると，等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a+(n-1)d$$

と表される。

$a_3 = 7$ より　　　　　　…… ①

$a_{10} = 28$ より　　　　　　…… ②

②－①より $7d = 21$　　$d = 3$

このとき①より　$a+6=7$　　$a=1$

したがって，一般項は　$a_n = \quad +(n-1)\cdot \quad = 3n-2$

等差数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 3n-2$ で与えられたとき，52 はこの等差数列の第何項かを求める。

　＝52　より　　　　　＝52

これを解くと　$n = 18$

したがって，52 は数列 $\{a_n\}$ の第 18 項である。

[MEMO]

3 第 2 項が 9，第 6 項が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 一般項を求めよ。

(2) 第 20 項を求めよ。

(3) -23 は第何項か。

Point Pickup

等差数列の一般項

等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項を a，公差を d とおくと

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表される。

a，d を求めるためには，与えられた項の条件から，a，d についての連立方程式を立てて解く。

第 1 講　PART3 確認問題

第 4 項が 8，第 7 項が 17 である等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

1 一般項は，$a_n=$ [ア] $n-$ [イ] である。

2 第 20 項は [ウエ] である。

3 80 は，この数列の第 [オカ] 項である。

PART4 等差数列の和

要点 ① 等差数列の和

初項 1，公差 3，項数 8 の等差数列の初項から第 8 項までの和を求める。

求める和を S とすると

$$S=1+4+7+10+13+16+19+22 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

である。

この和 S は，加える項の順番を逆にしても同じである。つまり

$$S=22+19+16+13+10+7+4+1 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

である。①と②を辺々加えると

$$\begin{array}{rr} S= & 1+\ 4+\ 7+10+13+16+19+22 \\ +)\ S= & 22+19+16+13+10+\ 7+\ 4+\ 1 \\ \hline 2S= & \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

よって　$2S=23\times\quad$ ⋯⋯ ③　より　$S=\dfrac{23\times8}{2}=92$

③における 8 は「項数」であり，23 は「初項」1 と第 8 項 22 の和である。第 8 項は，この等差数列の「末項」である。

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項を　とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\quad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+\quad \quad \cdots\cdots \quad ④$$

④の右辺の項の順番を逆にすると

$$S_n=\quad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+\quad \quad \cdots\cdots \quad ⑤$$

④と⑤を辺々加えると

$$\begin{array}{rl} S_n= & \qquad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+ \\ +)\ S_n= & \qquad+(\qquad)+(\qquad)+\cdots\cdots+(\qquad)+ \\ \hline 2S_n= & (a+l)+(a+l)+\ (a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)=\quad(a+l) \end{array}$$

よって $S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$

また，末項 l は第 n 項であるから　$l=a+(n-1)d$

よって $S_n=\dfrac{1}{2}n\{a+a+(n-1)d\}=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

したがって，次の公式が成り立つ。

等差数列の和

初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

$$=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

例 初項 2，末項 20，項数 7 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2}\cdot\ \cdot(\ +\ )=77$$

初項 −1，公差 3，項数 12 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2}\cdot\ \cdot\{2\cdot\ \ +(\ -1)\cdot\ \}=186$$

4 (1) 初項 29，末項 1，項数 8 の等差数列の和 S を求めよ。

(2)(i) 初項 1，公差 2，項数 20 の等差数列の和 S を求めよ。

(ii) 初項 2，公差 5 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

Point Pickup

等差数列の和

初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l) \quad \cdots\cdots \quad \frac{1}{2}\times\text{項数}\times(\text{初項}+\text{末項})$$

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\} \quad \cdots\cdots \quad \frac{1}{2}\times\text{項数}\times(\text{初項}+\text{第 }n\text{ 項})$$

第 1 講　PART4 確認問題

1　初項 5，末項 15，項数 8 の等差数列の和は アイ である。

2　初項 1，公差 3，項数 10 の等差数列の和は ウエオ である。

3　初項 -4，公差 6 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = n(\boxed{\text{カ}}\,n - \boxed{\text{キ}})$$

である。

第 2 講　等比数列

PART1 等比数列

要点① 等比数列

1に次々に2を掛けると，次の数列が得られる。

1，　，　，　，　，……

このように，初項 a に一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を「　　　　」といい，一定の数 r を「　　」という。

例 初項2，公比3の等比数列は

初項3，公比 -2 の等比数列は

要点② 等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ について

$a_1 = a$

$a_2 = a_1 \times r = \quad r$

$a_3 = a_2 \times r = \quad \times r = ar^2$

$a_4 = a_3 \times r = \quad \times r = ar^3$

$\vdots$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$（$\times r$, $\times r$, $\times r$, …, $\times r$）

と表され，一般に次のことが成り立つ。

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

例 初項3，公比2の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \quad \cdot \quad ^{n-1}$，第3項は $a_3 =$

初項2，公比 -3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \quad \cdot \quad ^{n-1}$，第4項は

$a_4 =$

※等比数列 $\{a_n\}$ において，次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1} = ra_n$$

特に，数列 $\{a_n\}$ の各項が0にならないときは $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$

[MEMO]

1 (1) 初項 -5，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項と第 5 項を求めよ。

(2) 次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求め，一般項を求めよ。

(i) $48,\ 12,\ 3,\ \dfrac{3}{4},\ \cdots\cdots$　　(ii) $2,\ -10,\ 50,\ -250,\ \cdots\cdots$

Point Pickup

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

等比数列の公比 r は，隣り合う 2 項の「比」である。

第 2 講　PART1 確認問題

1　初項5，公比2の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = \boxed{\text{ア}} \cdot \boxed{\text{イ}}^{\,n-1}$$

であり，第5項は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

2　等比数列 $\{a_n\}$ が，2，-6，18，-54，…… で与えられたとき，

その初項は $\boxed{\text{オ}}$，公比は $-\boxed{\text{カ}}$，一般項は

$a_n = \boxed{\text{キ}} \cdot \left(-\boxed{\text{ク}}\right)^{n-1}$ である。

3　等比数列 $\{a_n\}$ が，40，20，10，5，……で与えられたとき，

その初項は $\boxed{\text{ケコ}}$，公比は $\dfrac{1}{\boxed{\text{サ}}}$，一般項は

$a_n = \boxed{\text{シス}} \cdot \left(\dfrac{1}{\boxed{\text{セ}}}\right)^{n-1}$ である。

PART2 等比数列の一般項

要点 ① 与えられた 2 項から等比数列の一般項を求める

第 3 項が -12，第 5 項が -48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

初項を ，公比を とすると，等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

と表される。

$a_3 = -12$ より ……… ①

$a_5 = -48$ より ……… ②

② ①より $\dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$ $r^2 = 4$ よって $r =$

$r = 2$ のとき

①より $4a = -12$ $a = -3$

よって $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$

$r = -2$ のとき

①より $4a = -12$ $a = -3$

よって $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$

したがって，一般項は $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$ または $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$

【MEMO】

2 (1) 第 4 項が 81，第 6 項が 729 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 第 2 項が 48，第 5 項が -6 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

Point Pickup

等比数列の一般項

等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項を a，公比を r とおくと，

$$a_n = ar^{n-1}$$

と表される。

a，r を求めるためには，与えられた項の条件から，a，r についての連立方程式を立てて解く。この連立方程式は，2 式を辺々割る（または一方の式を他方の式に代入する）ことで解くことができる。

第 2 講　PART2 確認問題

1　第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，公比が正のとき，

$$a_n = \boxed{\text{ア}} \cdot \boxed{\text{イ}}^{\,n-1}$$

公比が負のとき，

$$a_n = -\boxed{\text{ウ}} \cdot \left(-\boxed{\text{エ}}\right)^{n-1}$$

である。

2　第 3 項が 18，第 6 項が -486 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = \boxed{\text{オ}} \cdot \left(-\boxed{\text{カ}}\right)^{n-1}$$

である。ただし，公比は実数とする。

PART3 等比数列の和

要点① 等比数列の和

初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 5 項までの和を求める。

求める和を S とすると

$$S=2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

①の両辺に公比 3 を掛けると

$$3S=2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

①－②より

$$\begin{array}{rl} S= & 2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4 \\ -)\ 3S= & \ 2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5 \\ \hline S-3S= & 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2\cdot3^5 \end{array}$$

$$(1-3)S=2(1-3^5)$$

よって $S=\dfrac{2(1-3^5)}{1-3}=242$

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を求める。

求める和を S_n とすると

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots \quad ③$$

③の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n=ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \quad \cdots\cdots \quad ④$$

③－④より

$$\begin{array}{rl} S_n= & a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \\ -)\ rS_n= & \ ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline S_n-rS_n= & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

よって，$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

④－③より，$(r-1)S_n=a(r^n-1)$ であるから，　$r\neq1$ のとき $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

また，$r=1$ のとき　$S_n=\quad+\quad+\quad+\cdots\cdots+\quad=\quad a$

したがって，次のことが成り立つ。

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とする。

$r \neq 1$ のとき　　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$ のとき　　$S_n = na$

例　初項 3，公比 2，項数 5 の等比数列の和は

$$\frac{\ \cdot(1-\qquad)}{1-\qquad} = \frac{\ \cdot(\qquad-1)}{\qquad-1} = 3\cdot 31 = 93$$

初項 -2，公比 1，項数 10 の等比数列の和は

$$\qquad\cdot\qquad = -20$$

3　(1)　初項5，公比2，項数6の等比数列の和 S を求めよ。

(2)　初項8，公比 -3，項数5の等比数列の和 S を求めよ。

(3)　初項1，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

Point Pickup

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$　……　$\dfrac{初項\times(1-公比^n)}{1-公比}$

$= \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$　……　$\dfrac{初項\times(公比^n-1)}{公比-1}$

$r=1$ のとき　$S_n = na$　……　項数×初項

特に

$r>1$ のとき(公比が1より大きいとき)は　$S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r<1$ のとき(公比がマイナス，または0から1の間のとき)は $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

を用いると，分母がプラスとなり計算が楽になる。

第2講　PART3 確認問題

1 初項 3，公比 2，項数 7 の等比数列の和は アイウ である。

2 初項 1，公比 -3，項数 5 の等比数列の和は エオ である。

3 初項 2，公比 5 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n = \frac{\boxed{カ}^{n} - \boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

である。

第 3 講　和の記号 Σ，階差数列

PART1 和の記号 Σ

要点 ① 和の記号 Σ

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ を，記号 Σ（シグマ）を用いて

と表す。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ において，k は 1 から n までの整数値をとる変数である。この 1 や n を変化させることにより，数列 $\{a_n\}$ のある部分の和を表すことができる。

例　$\displaystyle\sum_{k=2}^{5} a_k =$

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項(一般項)が n の式で表されるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ の a_k は k の式で表される。この k の式に，1 から n まで代入することにより，各項を列挙した和の形で表すことができる。

例　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = (2\cdot\quad-1)+(2\cdot\quad-1)+(2\cdot\quad-1)+\cdots\cdots+(2\cdot\quad-1)$

$= 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$

また，各項を列挙した和の形で表された式を，Σ を用いて表すことができる。

例　$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = \displaystyle\sum_{k=}$

※ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ のように，k の代わりに i や j などの文字を用いることがある。

※　Σ を使った和の書き表し方は一通りではない。

たとえば，$3+4+5+6+7 = \displaystyle\sum_{k=3}^{7} k = \sum_{k=1}^{5}$　　　である。

要点② Σ を用いて表された等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=$

である。よって，$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ は，初項 a，公比 r の等比数列の，初項から第 n 項までの和を表す。

したがって，次のことが成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\quad (r\neq 1)$$

例 $\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 4^{k-1}=\qquad\qquad =$

1 (1) 次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i) $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$　　(ii) $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$

(2) 次の式を，和の記号 Σ を用いて表せ。

(i) $2+4+6+8+10$　　(ii) $3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$

(3) 和 $\sum_{k=1}^{n}(-3)^{k-1}$ を求めよ。

Point Pickup

和の記号 Σ

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

Σ で表された等比数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

第 3 講　PART1 確認問題

1　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} a_k =$ ［ア］

［ア］は，次の①～④のうちから選べ。

① $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

② $a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_n$

③ $a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{n-1}$

④ $a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{n+1}$

2　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(2k+3)=5+$［イ］$+9+$［ウエ］

3　$3+6+9+12+15$ を和の記号Σを用いて表すと，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\text{［オ］}}$［カ］$k$ となる。

4　$5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$ を和の記号Σを用いて

表すと，$\displaystyle\sum_{k=\text{［ケ］}}^{\text{［キク］}} k^2$ となる。

5　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}=\frac{1-(\text{［コサ］})^n}{\text{［シ］}}$

PART2 自然数の和の公式，Σの性質

要点① 自然数の和の公式

1 から n までの自然数の和 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，初項 1，公差 1，項数 n の等差数列の和であるから

$$1+2+3+\cdots\cdots+n= \qquad =\frac{1}{2}n(n+1)$$

と表される。また，$1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，和の記号 Σ を用いて $\sum_{k=1}^{n}k$ と表される。

よって，等式 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ が成り立つ。

各項がすべて定数 c である数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots\cdots+c}_{n\text{個}}=cn$$

である。

以上より，次の公式が成り立つ。

数列の和の公式①

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$　　$\sum_{k=1}^{n}c=cn$（c は定数）　　特に　$\sum_{k=1}^{n}1=n$

要点② Σの性質

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots\cdots+(a_n+b_n)$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)=$$

であることから，次の性質が成り立つ。

Σの性質

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　　**2** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c は定数)

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}3=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$=\qquad\qquad +$

$=n(n+1)+3n$

$=n(n+1+3)$

$=n(n+4)$

2 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-5)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}6k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

Point Pickup

数列の和の公式①

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$（$c$ は定数） 特に $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

Σの性質

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　**2** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$（$c$ は定数）

第 3 講 PART2 確認問題

次の和を求めよ。

1 $\sum_{k=1}^{n} 7 = \boxed{ア}\,n$

2 $\sum_{k=1}^{n} 8k = \boxed{イ}\,n\left(n+\boxed{ウ}\right)$

3 $\sum_{k=1}^{n} (4k+3) = n\left(\boxed{エ}\,n+\boxed{オ}\right)$

PART3 自然数の 2 乗の和の公式

要点 ① 自然数の 2 乗の和の公式

1 から n までの自然数の 2 乗の和 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ を求める。

等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ において

$k=1$ のとき　　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ のとき　　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ のとき　　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

これらの式を辺々加えると

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+1\cdot n$$

$$=3\qquad+3\cdot\qquad\qquad+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって，等式 $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成り立つ。

同様に，等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いると，$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示すことができる。

数列の和の公式②

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　　$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

[MEMO]

3 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k^2$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2-3k+2)$

Point Pickup

数列の和の公式②

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

第 3 講 PART3 確認問題

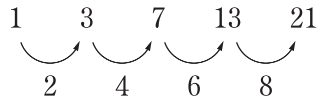
次の和を求めよ。

1 $\sum_{k=1}^{n} 6k^2 = n(n+\boxed{ア})(\boxed{イ}n+\boxed{ウ})$

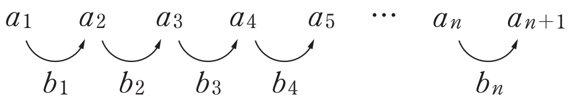
2 $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k+1) = \frac{n}{\boxed{エ}}(n^2+\boxed{オ}n+\boxed{カ})$

PART4 階差数列と一般項

要点 ① 階差数列



数列 1，3，7，13，21，……において，隣り合う 2 項の差をとって並べると，数列 2，4，6，8，……が得られる。この数列は，初項 2，公差 2 の等差数列である。



数列 $\{a_n\}$ において，隣り合う 2 項の差

$$a_{n+1}-a_n=b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の「　　　　」という。

上の例において，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$$

である。したがって

$$b_5= \quad \text{より} \quad a_6= \quad + \quad =21+10=31$$

である。このように，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより

$$a_{n+1}=a_n+b_n$$

であることを用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の項を順に求めることができる。

要点 ② 階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$a_{n+1}-a_n=b_n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}=a_n+b_n$$

であることから

$$a_2=a_1+b_1$$

$$a_3=a_2+b_2=a_1+(b_1+b_2)$$

$$a_4=a_3+b_3=a_1+(b_1+b_2+b_3)$$

$$\vdots$$

$$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_1+(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1})$$

が成り立つ。$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}=$　　　　であることから，以下のことが成り立つ。

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

例 数列 1，3，7，13，21，……の一般項を求める。

この数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

2，4，6，8，……

であり，その一般項は $b_n = 2n$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = \quad + $$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 1 + 2 \cdot$$

$$= 1 + (n-1)n$$

$$= n^2 - n + 1 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

①で $n = 1$ のとき $1^2 - 1 + 1 = 1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，①は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n = n^2 - n + 1$

4 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 1, 2, 7, 16, 29, ……　　(2) 3, 4, 7, 16, 43, ……

Point Pickup

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ …… ①

階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，初項から第 $n-1$ 項までの和を求めることにより，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

①の結果に $n=1$ を代入し，a_1 と一致するかの確認が必要。

第 3 講　PART4 確認問題

1 数列 $\{a_n\}$ が

$1,\ 6,\ 13,\ 22,\ 33,\ \cdots\cdots$

であるとする。

この数列の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$b_n = \boxed{ア}n + \boxed{イ}$

である。

したがって，$a_n = n^2 + \boxed{ウ}n - \boxed{エ}$ である。

2 数列 $\{a_n\}$ が

$2,\ 5,\ 11,\ 23,\ 47,\ \cdots\cdots$

であるとき，

$a_n = \boxed{オ} \cdot \boxed{カ}^{n-1} - \boxed{キ}$

である。

第 4 講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項

要点 ①　数列の和から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$a_1=S_1$ である。

また，$n\geqq 2$ のとき

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$$

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

である。よって，$S_n=S_{n-1}+a_n$ すなわち $S_n-S_{n-1}=a_n$ である。

したがって，以下のことが成り立つ。

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$a_1=S_1$$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

例　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-3n$ で表されているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$$a_1=\qquad=1^2-3\cdot 1=-2$$

また，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=$$

$$=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$$

$$=(n^2-3n)-(n^2-5n+4)$$

$$=2n-4$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot 1-4=-2$ となり，a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=2n-4$

[MEMO]

1 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = 3n^2 + 2n$

(2) $S_n = 2^n - 1$

Point Pickup

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

初項について　$a_1 = S_1$　……　①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$　……　②

数列 $\{a_n\}$ の初項は①より求めることができる。

②で求めた a_n の式において $n=1$ を代入した結果が a_1 と一致すれば，a_n は $n \geqq 1$ のとき，②で求めた式で表される。

第 4 講　PART1 確認問題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$S_n = n^2 + 4n$

$a_n =$ ア $n +$ イ

2　$S_n = 3^n$

$a_1 =$ ウ

$n \geqq 2$ のとき，$a_n =$ エ $\cdot$ オ $^{n-1}$

PART2 分数で表された数列の和

要点 ① 分数で表された数列の和

数列 $\dfrac{1}{1\cdot2}$, $\dfrac{1}{2\cdot3}$, $\dfrac{1}{3\cdot4}$, ……の初項から第 n 項までの和を求める。

この数列の第 n 項は　　　　　であり

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

である。この数列の初項は $\dfrac{1}{1\cdot2}=$　　　　と変形することができる。第 2 項以降も同様の変形を行うことにより，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\qquad+\qquad+\cdots\cdots+$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

※ある分数式を分解して，複数の分数式の和の形(または多項式と複数の分数式の和の形)で表すことを「部分分数分解」という。

【MEMO】

2 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Point Pickup

分数で表された数列の和

数列の各項が，分母が積の形である分数で表されているとき，各項を複数の分数の差の形で表すことで，その数列の和を求めることができる場合がある。

第4講 PART2 確認問題

1 k を自然数として，次の等式が成り立つことを証明する。

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$$

（証明）

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(\boxed{\text{ア}})-(\boxed{\text{イ}})}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boxed{\text{ア}}}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{\boxed{\text{イ}}}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{2k-1}-\frac{\boxed{\text{エ}}}{2k+1}$$

よって，$\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}$

（証明終わり）

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① 1　　② 2

③ k　　④ $k+1$

⑤ $2k-1$　　⑥ $2k+1$

2 次の和を求めよ。

$$\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{2}{23\cdot25}=\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

第 5 講　漸化式と数学的帰納法

PART1 漸化式

要点① 漸化式

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$ で定義される数列を考える。

$a_1=$

$a_2=3a_1+1=3\cdot\quad+1=4$

$a_3=3a_2+1=3\cdot\quad+1=13$

$a_4=3a_3+1=3\cdot\quad+1=40$

これを繰り返すと，数列の項が順に求められ，すべての項がただ1通りに定まる。

このように，数列 $\{a_n\}$ の初項，または初項からいくつかの項と，前の項から次の項をただ1通りに定める規則を与えることで，この数列のすべての項を順に定義することができる。これを「帰納的定義」という。

上の例においては，式 $a_{n+1}=3a_n+1$ によって規則が定められる。このように，前の項から次の項をただ1通りに定める関係式を「　　　　」という。

※以降，断りのない限り，漸化式は $n=1$，2，3，……で成り立つものとする。

[MEMO]

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n-2$　　(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-2n$

Point Pickup

漸化式を用いて項を順に求める

前の項から次の項をただ 1 通りに定める関係式を「漸化式」という。
この漸化式と，初項(または初項からいくつかの項)によって，この数列のすべての項を順に求めることができる。

第 5 講　PART1 確認問題

1 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$ ($n=1$，2，3，…) で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2=$ ア ，$a_3=$ イ ，$a_4=$ ウエ

である。

2 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n$ ($n=1$，2，3，…) で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2=$ オ ，$a_3=$ カ ，$a_4=$ キク

である。

PART2 漸化式と一般項

要点 ① 等差数列・等比数列を表す漸化式

等差数列の各項は，前の項に一定の数 d(公差)を足すことによって順次得られる。よって，等差数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1}=a_n+d$$

この漸化式が与えられることにより，等差数列の公差 d が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等差数列の一般項を求めることができる。

例 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ は，初項 ，公差 の等差数列である。

よって $a_n=$ $+(n-1)\cdot$ $=2n-1$

等比数列の各項は，前の項に一定の数 r(公比)を掛けることによって順次得られる。よって，等比数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1}=ra_n$$

この漸化式が与えられることにより，等比数列の公比 r が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等比数列の一般項を求めることができる。

例 $a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ は，初項 ，公比 の等比数列である。

よって $a_n=$ $\cdot$ ${}^{n-1}$

要点 ② $a_{n+1}=a_n+(n$の式$)$ の形の漸化式

$a_{n+1}=a_n+(n$の式$)$ の形をした漸化式は，$a_{n+1}-a_n=(n$の式$)$ と変形することができる。この n の式は，数列 $\{a_n\}$ の「階差数列」の一般項を表す。この階差数列の一般項を用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

例 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n-2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=n-2$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k-2)=2+\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-5n+8)$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=\dfrac{1}{2}(n^2-5n+8)$

[MEMO]

2 (1) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=-3$, $a_{n+1}=a_n+5$　　(ii) $a_1=9$, $a_{n+1}=3a_n$

(2) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=4$, $a_{n+1}=a_n+8n$　　(ii) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+4^n$

Point Pickup

等差数列・等比数列を表す漸化式

$a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$ …… 初項 a, 公差 d の等差数列を表す

$a_1=a$, $a_{n+1}=ra_n$ …… 初項 a, 公比 r の等比数列を表す

$a_{n+1}=a_n+$(nの式) の形の漸化式

$a_{n+1}-a_n=$(nの式) より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が(n の式)である。

第 5 講　PART2 確認問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4$ ($n=1$，2，3，…)

$a_n=$ [ア] $n-$ [イ]

2　$a_1=2$，$a_{n+1}=5a_n$ ($n=1$，2，3，…)

$a_n=$ [ウ] $\cdot$ [エ] $^{n-1}$

3　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+6n$ ($n=1$，2，3，…)

$a_n=$ [オ] n^2- [カ] $n+$ [キ]

4　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2^n$ ($n=1$，2，3，…)

$a_n=$ [ク] $^n+$ [ケ]

PART3 $a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

要点① $a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

$a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n-1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$a_1=4$，$a_2=$　，$a_3=$　，$a_4=$　，……

である。この数列の各項から1を引いた数列　　　について

$a_1-1=$　，$a_2-1=$　，$a_3-1=$　，$a_4-1=$　，……

であり，数列 $\{a_n-1\}$ は初項3，公比2の等比数列であると考えられる。

数列 $\{a_n-1\}$ が公比2の等比数列であることを表す漸化式は

　　$=2($　　$)$

であり，この漸化式を変形すると，$a_{n+1}=2a_n-1$ が得られる。

漸化式 $a_{n+1}=2a_n-1$ …… ①に対して，①の a_{n+1} と a_n を α でおき換えた等式

　$=2$　-1 …… ②

を用意する。①－②より

$a_{n+1}-$　$=2(a_n-$　$)$ …… ③

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 2a_n-1 \\ -) & \alpha & = & 2\alpha\ \ -1 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha & = & 2(a_n-\alpha) \end{array}$$

また，②より

これを③に代入して

$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

を得る。

一般に，p，q が定数で $p\neq0$，$p\neq1$ のとき，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ は，等式 $\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を用いて，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形することができる。

例 $a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n-1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$a_{n+1}=2a_n-1$ を変形すると　$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

$\alpha=2\alpha-1$
$\alpha=1$

よって，数列　　　は，初項　　　$=4-1=$　，

公比　の等比数列である。

したがって　　　$=3\cdot2^{n-1}$ より 求める一般項は　$=3\cdot2^{n-1}+1$

[MEMO]

3　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=6$，$a_{n+1}=3a_n-8$　　(2)　$a_1=-1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-3$

Point Pickup

$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

等式 $\alpha=p\alpha+q$ との差をとり，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であることがわかる。

第 5 講　PART3 確認問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$a_1=6,\ a_{n+1}=4a_n-3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$a_n=\boxed{ア}\cdot\boxed{イ}^{n-1}+\boxed{ウ}$$

2　$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$a_n=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}^{n-1}}+\boxed{カ}$$

PART4 数学的帰納法

要点① 数学的帰納法

$a_n=5^n-2^n$ で表される数列について

$a_1=3,\ a_2=21,\ a_3=117,\ a_4=609$

である。$21=3\cdot7$，$117=3\cdot39$，$609=3\cdot203$ より，数列 $\{a_n\}$ の初項から第4項までは3の倍数であることがわかる。では，数列 $\{a_n\}$ の項はすべて3の倍数だろうか。

ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを，無数にある自然数1つ1つについて確かめることは不可能である。

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$ のように，初項と，前の項から次の項をただ1通りに定める関係式(漸化式)が与えられれば，この数列のすべての項を順に定義することができる。これと同様に，自然数 n に関する命題 P が，すべての自然数 n について順に成り立つことは，次のように確かめることができる。

[1] $n=1$ のとき，命題 P が成り立つことを示す。

[2] $n=k$ のとき，命題 P が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

[1]と[2]が示されることにより，$n=1$ のとき命題 P が成り立つことから，$n=2$ のときにも命題 P が成り立ち，$n=2$ のとき命題 P が成り立つことから，$n=3$ のときにも命題 P が成り立つ。以下同様にして，$n=4$，5，6，……のときにも命題 P が成り立ち，結果，すべての自然数 n について命題 P が成り立つ。

このような証明法を「　　　　　　」という。

例 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ …… ①が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

[1] $n=$　のとき　　①の左辺$=1$，①の右辺$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2] $n=$　のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

$n=k+1$ のとき

①の左辺$=1+2+3+\cdots\cdots+\quad+$

$$= \qquad\qquad +(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

4 数学的帰納法により，次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

Point Pickup

数学的帰納法による証明

自然数 n に関する命題 P が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の[1]，[2]を証明すればよい。

[1] $n=1$ のとき命題 P が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき命題 P が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つ。

第 5 講　PART4 確認問題

1　すべての自然数 n において，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots(\text{A})$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

（証明）

[1]　$n=$ **ア** のとき，

(A)の（左辺）＝ **イ** ，(A)の（右辺）＝ **ウ**

より，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2$$

$n=k+1$ のとき，(A)より，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+\{2(\boxed{エ})-1\}$$

$$=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)$$

$$=\boxed{オ}+(2k+1)$$

$$=(\boxed{カ})^2$$

よって，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，(A)はすべての自然数 n で成り立つ。

（証明終わり）

ア ～ **カ** は，次の①～⑥のうちから選べ。

① 1　　② 2　　③ k

④ k^2　　⑤ $k-1$　　⑥ $k+1$

第6講　確率分布

PART1　確率変数と確率分布

要点①　確率変数と確率分布

「　　　　　」… 試行の結果によってその値が定まり，その値をとる確率が定まる変数

確率変数 X について

$X=a$ となる確率を

$a \leqq X \leqq b$ となる確率を

のように表す。

確率変数 X の値とその値をとる確率の対応関係を「　　　　　」(分布)といい，確率変数 X は確率分布に　　　という。

一般に，確率変数 X のとりうる値 x_1，x_2，……，x_n に対して確率 p_1，p_2，……，p_n が対応するとき，X の確率分布を次のように表す。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

また，このとき

$p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，……，$p_n \geqq 0$

$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=$

が成り立つ。

例　2枚の硬貨を同時に投げる試行において，表の出る枚数を X とするとき，X の確率分布は下の表のようになる。

X				計
P				

また $X=0$，$X \geqq 1$ となる確率は　$P(X=0)=$　，

$P(X \geqq 1)=$　　　　$+$　　　　$=\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ である。

[MEMO]

1 赤球4個，白球3個の入った袋から，2個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) $P(X \leqq 1)$ を求めよ。

Point Pickup

確率分布

確率変数 X のとりうる値 x_1, x_2, ……, x_n と，それぞれの値をとる確率 p_1，p_2，……，p_n の対応関係を，X の確率分布という。

$p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，……，$p_n \geqq 0$

$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = 1$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

第 6 講 PART1 確認問題

1 赤球 3 個，白球 5 個の入った袋から，3 個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{\boxed{アイ}}{56}$	$\frac{\boxed{ウエ}}{56}$	$\frac{\boxed{オカ}}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

(2) $P(X \geqq 2)$ を求めよ。

$$P(X \geqq 2) = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

PART2 確率変数の期待値

要点① 確率変数の期待値

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられたとき

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

を，X の「　　　」または「　　　」といい，

(または m)で表す。

確率変数の期待値(平均)

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

例 右の表のような賞金がついている1000本のくじがある。くじを1本引いたときの賞金を X 円とすると，X の確率分布は下の表のようになる。

	賞金	本数
1等	10000円	1本
2等	2000円	3本
はずれ	0円	996本
合計		1000本

X	10000	2000	0	計
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{3}{1000}$	$\frac{996}{1000}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=10000\cdot\frac{1}{1000}+2000\cdot\frac{3}{1000}+0\cdot\frac{996}{1000}=16\text{(円)}$$

[MEMO]

2 3枚の硬貨を同時に投げて，表が出る枚数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

Point Pickup

確率変数の期待値

確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき

期待値　$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

第 6 講 PART2 確認問題

1 さいころを2回投げて，5以上の目が出る回数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

$$E(X)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

PART3 確率変数の分散と標準偏差

要点① 確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X の散らばりの度合いを表す値として

確率変数と　　　　　　　　　　　　　の期待値(平均)

を考える。

X の確率分布が右の表で与えられ，その期待値が　で

あるとする。X の各値と m との差の 2 乗

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$(x_1-m)^2$，$(x_2-m)^2$，……，$(x_n-m)^2$

について，これらの値をとる

確率変数 $(X-m)^2$ の期待値は

$(X-m)^2$	$(x_1-m)^2$	$(x_2-m)^2$	$\cdots$	$(x_n-m)^2$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$E\left((X-m)^2\right)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

である。これを X の「　　　」といい，　　　で表す。

確率変数の分散

$$V(X)=E\left((X-m)^2\right)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

分散は，確率変数 X の単位が 2 乗されているから，X の単位と一致させるために，分散の正の平方根　　　　を考える。これを X の「　　　　　」といい，　　　で表す。

確率変数の標準偏差

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

確率変数 X の分散や標準偏差は，X の期待値からの散らばりの度合いを表す。分散や標準偏差の値が小さいほど，X の値が期待値の付近に集中し，大きいほど期待値からの散らばりが大きいことを示す。

例 2 枚の硬貨を同時に投げる試行において，表の出る枚数を X とするとき，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X の期待値は

$$= \quad + \quad + \quad =1$$

X の分散は

$$= \quad + \quad + \quad =\frac{1}{2}$$

X の標準偏差は

$$=\sqrt{V(X)}= \quad =\frac{\sqrt{2}}{2}$$

要点 ② 分散の公式

確率変数 X の分散を表す式を変形すると

$$\begin{aligned} V(X) &= (x_1-m)^2 p_1 + (x_2-m)^2 p_2 + \cdots\cdots + (x_n-m)^2 p_n \\ &= \left(x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + \cdots\cdots + x_n{}^2 p_n\right) \\ &\qquad -2m(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots\cdots + x_n p_n) \\ &\qquad\qquad + m^2 (p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n) \\ &= E\left(X^2\right) - 2m\cdot m + m^2\cdot 1 \\ &= E\left(X^2\right) - m^2 \end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

分散の公式

$$V(X)=E\left(X^2\right)-m^2=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$

例 X の確率分布が右の表のようであるとき

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X の期待値は $E(X)=1$

よって，X の分散は

$$V(X)= \quad -$$

$$= \quad \cdot\frac{1}{4}+ \quad \cdot\frac{2}{4}+ \quad \cdot\frac{1}{4} \quad =\frac{1}{2}$$

3　当たりくじ 2 本を含む 10 本のくじがある。このくじを同時に 5 本引いたときの当たりくじの本数を X とするとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

Point Pickup

確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき，

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

X の期待値を $E(X)=m$ とすると

分散　$V(X)=E\left((X-m)^2\right)$

$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$

$=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$　……(X^2 の期待値)−(Xの期待値)^2

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$　……($\sqrt{分散}$)

第 6 講　PART3 確認問題

1 黒石 4 個，白石 2 個の入った袋から，3 個の石を同時に取り出すとき，出る黒石の個数を X とする。X の期待値，分散，標準偏差を求め，答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

$E(X)=$ ア ，$V(X)=$ イ ，$\sigma(X)=$ ウ

① 2　② 3　③ 4　④ $\sqrt{2}$

⑤ $\frac{2}{5}$　⑥ $\frac{4}{5}$　⑦ $\frac{\sqrt{10}}{5}$　⑧ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

PART4 確率変数の変換

要点 ① 確率変数の変換と $aX+b$ の期待値

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，a，b を定数として，X の 1 次式

$$Y=aX+b$$

で Y を定めると，Y は

$$y_k=ax_k+b$$

で定まる値をとる確率変数であり，Y の確率分布は右の表のようになる。このとき，Y の期待値 $E(Y)$ は

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(aX+b)\\&=(ax_1+b)\cdot p_1+(ax_2+b)\cdot p_2+\cdots\cdots+(ax_n+b)\cdot p_n\\&=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)\\&=a\qquad+b\cdot\\&=aE(X)+b\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

$aX+b$ の期待値

確率変数 X と定数 a，b について

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

例　確率変数 X の期待値が 3 であるとき，$Y=2X-1$ で表される確率変数 Y の期待値は

$$E(Y)=E(2X-1)=\quad E(X)\qquad=2\cdot3-1=5$$

要点② $aX+b$ の分散，標準偏差

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数 X，および a，b を定数として X の1次式 $Y=aX+b$ で定められる確率変数 Y の確率分布が右の表で与えられているとき，Y の分散と標準偏差を考える。

$E(X)=m$ とすると

$$E(Y)=aE(X)+b=am+b$$

Y の分散 $V(Y)$ は

$$V(Y)=\{y_1-E(Y)\}^2p_1+\{y_2-E(Y)\}^2p_2+\cdots\cdots+\{y_n-E(Y)\}^2p_n$$

$$=\{(ax_1+b)-(am+b)\}^2p_1+\{(ax_2+b)-(am+b)\}^2p_2$$

$$+\cdots\cdots+\{(ax_n+b)-(am+b)\}^2p_n$$

$$=\{a(x_1-m)\}^2p_1+\{a(x_2-m)\}^2p_2+\cdots\cdots+\{a(x_n-m)\}^2p_n$$

$$=\quad\left\{(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n\right\}$$

$$=\quad V(X)$$

Y の標準偏差 $\sigma(Y)$ は

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{a^2V(X)}=\quad\sigma(X)$$

よって，次のことが成り立つ。

$aX+b$ の分散，標準偏差

確率変数 X と定数 a，b について

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

例　確率変数 X の分散が2であるとき，$Y=3X+5$ で表される確率変数 Y の分散と標準偏差は

$$V(Y)=V(3X+5)=\quad V(X)=3^2\cdot2=18$$

$$\sigma(Y)=\sigma(3X+5)=\quad\sigma(X)=3\sqrt{2}$$

※ $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

4 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，確率変数 $6X-5$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

Point Pickup

$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X と定数 a，b について

期待値　$E(aX+b)=aE(X)+b$

分散　$V(aX+b)=a^2V(X)$

標準偏差 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第 6 講　PART4 確認問題

1　確率変数 X の確率分布が下の表で与えられているとき，確率変数 $4X-3$ の期待値，分散，標準偏差を求め，答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(4X-3)=$ ア ，$V(4X-3)=$ イ ，

$\sigma(4X-3)=$ ウ

①　2　　②　5　　③　15　　④　$\sqrt{15}$

⑤　$\frac{5}{4}$　　⑥　$\frac{9}{4}$　　⑦　$\frac{15}{16}$　　⑧　$\frac{\sqrt{15}}{4}$

第 7 講　確率変数の和と積

PART1 確率変数の和の期待値

要点 ① 同時分布，確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X，Y について，$X=a$ かつ $Y=b$ である確率を

$$P(X=a,\ Y=b)$$

と表す。

X のとる値が x_1，x_2，……，x_n，Y のとる値が y_1，y_2，……，y_m であるとき，$X=x_i$ かつ $Y=y_j$ である確率 $P(X=x_i,\ Y=y_j)$ を p_{ij}，$P(X=x_i)=p_i$，$P(Y=y_j)=q_j$ とすると，X，Y の確率分布は右の表のようになる。この対応を X と Y の「　　　　」という。

X＼Y	y_1	y_2	…	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	
計			…		

この表から

$$P(X=x_i)=p_{i1}+p_{i2}+\cdots\cdots+p_{im}=p_i$$

$$P(Y=y_j)=p_{1j}+p_{2j}+\cdots\cdots+p_{nj}=q_j$$

が成り立つ。

2つの確率変数 X，Y の和を $Z=X+Y$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき，$Z=X+Y$ の期待値は

X＼Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$E(Z)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)\qquad+(\qquad)p_{21}+$$

$$=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})$$

$$=x_1\quad+x_2\quad+y_1\quad+y_2$$

$$=E(X)+E(Y)$$

一般に，次のことが成り立つ。

確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X，Y について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

例　1個のさいころを2回投げるとき，1回目と2回目に出る目の和の期待値を求める。

1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

同様に $E(Y)=\frac{7}{2}$

したがって，出る目の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\quad+\quad=7$$

確率変数 X と定数 a，b について，$E(aX+b)=aE(X)+b$ が成り立つことから，確率変数 X，Y と定数 a，b について

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

が成り立つ。また，3つの確率変数 X，Y，Z についても

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

が成り立つ。

1 100円硬貨1枚と10円硬貨1枚を同時に投げる。

(1) 表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2) 表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

Point Pickup

確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X, Y と定数 a, b について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

第 7 講 PART1 確認問題

1 1から5までの数が1つずつ書かれた5枚のカードがある。この中から1枚引き，数を記録してからもとに戻し，もう1枚引く。1回目と2回目に引いたカードに書かれた数の和の期待値を求めよ。 [ア]

2 500円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時に投げるとき，表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

[イウエ] 円

PART2 独立な確率変数

要点 ① 独立な確率変数，独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X，Y において，X のとる値 x_i と Y のとる値 y_j について，どのような x_i，y_j に対しても

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

が成り立つとき，確率変数 X，Y は互いに「　　　」であるという。

例 2 つの確率変数 X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき

X＼Y	0	1	2	計
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$P(X=0,\ Y=1)=\quad=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0)\cdot P(Y=1)=\quad\cdot\quad=\frac{1}{4}$$

よって $P(X=0,\ Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)$

X，Y の値のすべての組に関して同様の式が成り立つ。よって，X，Y は独立である。

2 つの試行 S，T が独立であるとき，S における確率変数 X と T における確率変数 Y は独立である。

2 つの独立な確率変数 X，Y の積を $Z=XY$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき，X と Y は独立であるから

X＼Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$p_{11}=\qquad$，$p_{12}=p_1q_2$，$p_{21}=p_2q_1$，$p_{22}=p_2q_2$

よって

$$\begin{aligned}E(Z)&=(x_1y_1)p_{11}+(x_1y_2)p_{12}+(x_2y_1)p_{21}+(x_2y_2)p_{22}\\&=(x_1y_1)p_1q_1+(x_1y_2)p_1q_2+(x_2y_1)p_2q_1+(x_2y_2)p_2q_2\\&=x_1p_1\cdot y_1q_1+x_1p_1\cdot y_2q_2+x_2p_2\cdot y_1q_1+x_2p_2\cdot y_2q_2\\&=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

一般に，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の積の期待値

確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

例 1個のさいころを2回投げるとき，1回目と2回目に出る目の積の期待値を求める。

1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると , 求めるものは XY の期待値である。

$$E(X)=E(Y)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

X，Y は独立であるから , 出る目の積 XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\quad\cdot\quad=\frac{49}{4}$$

要点② 独立な確率変数の和の分散

2つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が成り立つ。これを用いると，和 $X+Y$ の分散について，分散の公式より

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E\left((X+Y)^2\right)-\{E(X+Y)\}^2\\&=E\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\{E(X)+E(Y)\}^2\\&=E\left(X^2\right)+2E(XY)+E\left(Y^2\right)-\left[\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+\{E(Y)\}^2\right]\\&=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2+E\left(Y^2\right)-\{E(Y)\}^2=V(X)+V(Y)\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の和の分散

確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

例 1個のさいころを2回投げるとき，1回目と2回目に出る目の和の分散を求める。

1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の分散である。

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

同様に $V(Y)=\dfrac{35}{12}$

X，Y は独立であるから，出る目の和 $X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\quad+\quad=\frac{35}{6}$$

互いに独立な3つの確率変数 X，Y，Z について，次のことが成り立つ。

$$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z),\quad V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$$

2 2 つの確率変数 X, Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) $X+Y$ の分散を求めよ。

Point Pickup

独立な確率変数の積の期待値と和の分散

確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

第 7 講　PART2 確認問題

1　2つの確率変数 X，Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	1	2	3	計
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1)　XY の期待値を求めよ。

$$E(XY)=\boxed{\text{ア}}$$

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

$$V(X+Y)=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{36}$$

第8講　二項分布

PART1　二項分布

要点①　二項分布

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_r\, p^r (1-p)^{n-r} $$

であり，$1-p=q$ とおくと，この確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} \quad (p+q=1) $$

と表される。

この反復試行において，事象 A の起こる回数を X とすると，X は 0，1，……，n の値をとる確率変数であり，$X=r$ となる確率は

$$ P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n) $$

である。よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	1

この表で与えられる確率分布を「　　　　　」という。二項分布は n と p の値によって定まり，　　　で表す。またこのとき，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に「　　　」という。

※$X=0$，1，……，r，……，n のときの確率の総和は，二項定理より

$$ {}_n\mathrm{C}_0\, p^0 q^n + {}_n\mathrm{C}_1\, p^1 q^{n-1} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n\, p^n q^0 = (p+q)^n = 1^n = 1 $$

であることが確認できる。

例　1個のさいころを3回投げるとき，2以下の目が出る回数を X とする。

1回の試行で2以下の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

この試行を3回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(3,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従う。

よって，$X=r$ となる確率は

$$ P(X=r)=\ \ \mathrm{C}\ \ \left(\quad\right)\left(\quad\right) \qquad (r=\qquad\qquad) $$

であり

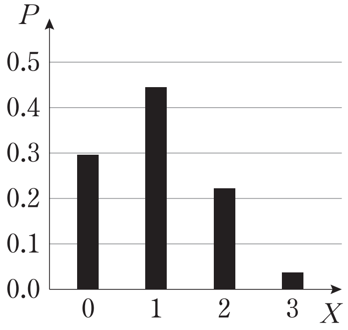
$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27},\qquad P(X=1)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{27},$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27},\qquad P(X=3)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{27}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

また，この確率分布をグラフで表すと右のようになる。



1　1枚の硬貨を4回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　X の確率分布を求めよ。

Point Pickup

二項分布 $B(n,\ p)$

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，その確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0\,p^0q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\,p^1q^{n-1}$	……	${}_n\mathrm{C}_r\,p^rq^{n-r}$	……	${}_n\mathrm{C}_n\,p^nq^0$	1

この表で与えられる確率分布を「二項分布」といい，$B(n,\ p)$ で表す。

また，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う，という。

第8講 PART1 確認問題

1 1から4までの数が1つずつ書かれた4個の球が袋の中に入っている。この中から1個取り出す試行を3回行う。ただし，取り出した球はもとに戻すものとする。1が書かれた球を取り出した回数をXとするとき，次の問いに答えよ。

(1) Xはどのような二項分布に従うか。答えは，下の①～④のうちから選べ。 ア

① $B\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$　　② $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$

③ $B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$　　④ $B\left(\frac{1}{4},\ 3\right)$

(2) Xの確率分布を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{\text{イウ}}{64}$	$\frac{\text{エオ}}{64}$	$\frac{\text{カ}}{64}$	$\frac{\text{キ}}{64}$	1

PART2 二項分布の期待値，分散，標準偏差

要点 ① 二項分布の期待値，分散，標準偏差

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p である試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると，X は二項分布　　　に従う。この二項分布の期待値，分散を求める。

1 回目，2 回目，……，n 回目に

事象 A が起これば　，起こらなければ

の値をとる確率変数をそれぞれ X_1，X_2，……，X_n とすると，

$X=$

と表される。よって，X の期待値は

$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)$

ここで，確率変数 X_k ($k=1$，2，……，n)の確率分布は右の表のようになる。ただし，$p+q=1$ である。よって，

X_k	0	1	計
P	q	p	1

$E(X_k)=0\cdot q+1\cdot p=$

である。

したがって，X の期待値は

$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)=\quad+\quad+\cdots\cdots+\quad=$

また，確率変数 X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であるから，X の分散は

$V(X)=V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)$

$E\left(X_k^2\right)=0^2\cdot q+1^2\cdot p=$　より

$V(X_k)=E\left(X_k^2\right)-\{E(X_k)\}^2=\quad-\quad{}^2=p(1-p)=$

よって，X の分散は

$V(X)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)=\quad+\quad+\cdots\cdots+\quad=$

以上より，次のことが成り立つ。

二項分布の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値 $E(X)=np$,　　分散 $V(X)=npq$,　　標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

例　1枚の硬貨を10回投げるとき，表が出る回数を X とする。X の期待値と標準偏差を求める。

X は二項分布　　　　　に従うので

期待値 $E(X)=$　　　$=5$

分散 $V(X)=$　　　　　$=\dfrac{5}{2}$

標準偏差 $\sigma(X)=$　　$=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

2　1個のさいころを300回投げるとき，6の目が出る回数を X とする。

(1)　X の期待値を求めよ。

(2)　X の分散を求めよ。

(3)　X の標準偏差を求めよ。

Point Pickup

二項分布の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値　$E(X)=np$

分散　$V(X)=npq$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

第8講 PART2 確認問題

1 1個のさいころを400回投げるとき，偶数の目が出る回数を X とする。次の問いに答えよ。

(1) X の期待値を求めよ。答えは，下の①～④のうちから選べ。

$E(X)=$ ア

① 50　② 100
③ 200　④ 400

(2) X の分散と標準偏差を求めよ。答えは，下の①～⑨のうちから選べ。

$V(X)=$ イ ，$\sigma(X)=$ ウ

① 5　② 10　③ 20
④ 25　⑤ 50　⑥ 100
⑦ 200　⑧ 400　⑨ 1600

第 9 講　正規分布
PART1　連続分布

要点 ①　連続型確率変数と連続分布

あるものの個数やあることがらが起こった回数のように，とびとびの値をとる確率変数を「離散型確率変数」という。これに対して，重さ，長さ，時間のように連続的な値をとる確率変数を「　　　　　　　　」という。

長さ (cm)	相対度数
9.1 以上 9.3 未満	0.02
9.3 ～ 9.5	0.03
9.5 ～ 9.7	0.09
9.7 ～ 9.9	0.18
9.9 ～ 10.1	0.30
10.1 ～ 10.3	0.20
10.3 ～ 10.5	0.14
10.5 ～ 10.7	0.03
10.7 ～ 10.9	0.01
計	1.00

右の表は，紙テープを目分量で 10 cm の長さになるように切り，切り取られたテープの実際の長さを測定することを 100 回繰り返した結果を，相対度数で表したものである。

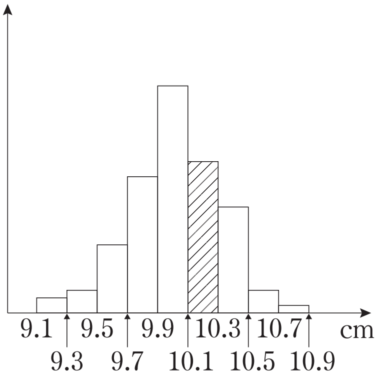
実際の長さを X cm とすると，表より

$$10.3 \leqq X < 10.5$$

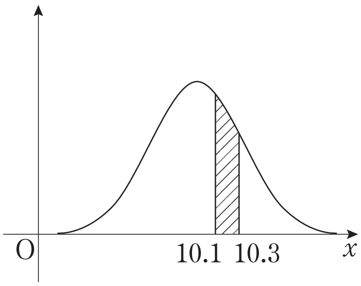
で表される階級の相対度数が　　　であることから，X が

$$10.3 \leqq X < 10.5$$

の階級に属する　　　が 0.14 であると考えることができる。このように，各階級の相対度数を，X が各階級に属する確率と考えると，X は各階級に属する確率が定まる確率変数と考えられ，その確率分布は，右のような相対度数の分布の表になる。

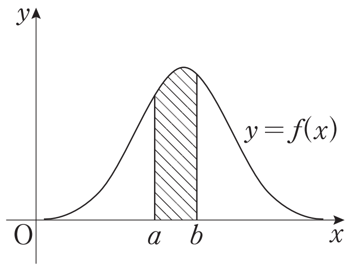


右のグラフは，上の測定で得られたデータを用いて，各階級に対応する柱状部(長方形)の　　　が，その階級の相対度数と等しくなるように縦軸の目盛りをとったヒストグラムである。例えば，X が 10.1 cm 以上 10.3 cm 未満の値をとる確率は，右の図の斜線部分の面積に等しく，　　　である。また，これらの長方形の面積の和は　である。



測定する個数を増やし，さらに階級の幅を小さくすると，ヒストグラムの形は 1 つの曲線に近づいていく。右の図において，曲線と 2 直線 $x = 10.1$，$x = 10.3$ および x 軸で囲まれた部分の面積は 0.20 となり，この面積が X が 10.1 cm 以上 10.3 cm 未満の値をとる確率を表す。

一般に, 連続型確率変数 X に1つの関数 $y=f(x)$ が対応し, $a \leqq X \leqq b$ となる確率が右の図の斜線部分の面積に等しいとき, 関数 $f(x)$ を X の「　　　　　　　」といい, $y=f(x)$ のグラフを X の「　　　　　」という。



確率密度関数 $f(x)$ の性質は以下

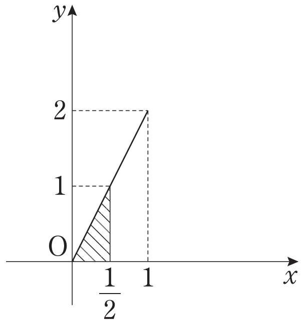
[1] 常に $f(x) \geqq 0$

[2] $P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$

[3] Xのとりうる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ のとき $\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$

例 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=2x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ で与えられているとき

$$P\left(0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}\right)= \qquad\qquad =\frac{1}{4}$$



1 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\frac{1}{2}x\,(0 \leqq x \leqq 2)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(0.3 \leqq X \leqq 0.7)$

(2) $P(0 \leqq X \leqq 2)$

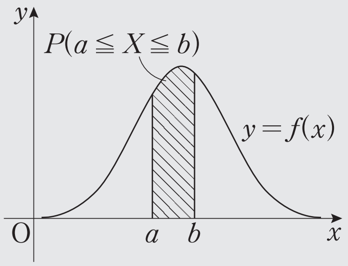
Point Pickup

確率密度関数と確率

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると

$$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{曲線 } y=f(x) \text{ と } x \text{ 軸および 2 直線} \\ x=a,\ x=b \text{ で囲まれた部分の面積}\end{array}\right)$$



X のとりうる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ のとき $\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$ である。

第 9 講　PART1 確認問題

1　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\frac{1}{18}x\ (0 \leqq x \leqq 6)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(1 \leqq X \leqq 5)=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

(2)　$P(0 \leqq X \leqq 6)=\boxed{ウ}$

PART2 正規分布

要点 ① 正規分布

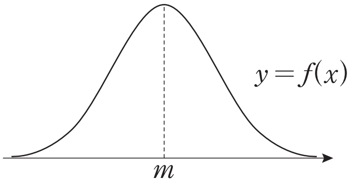
連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，m を実数，σ を正の実数として

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

で表されるとき，X は「　　　　　　　　　　」という。π は円周率，e は自然対数の底とよばれる無理数で，$e=2.71828\cdots\cdots$ である。X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき

X の期待値 $E(X)=m$，X の標準偏差 $\sigma(X)=\sigma$

であることが知られている。



$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，次のような性質をもつ。

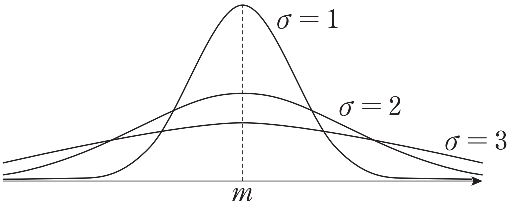
[1] 直線 $x=m$ に関して対称であり，y は $x=m$ のとき最大値をとる。

[2] x 軸を漸近線(曲線が限りなく近づく直線)とする。

[3] 標準偏差 σ について

・σ が大きくなると，曲線の山が低くなり，横に広がる。

・σ が小さくなると，曲線の山が高くなり，$x=m$ の周りに集まる。



工場で一定の規格に基づいて作られた部品の重さの誤差など，社会現象や自然現象のデータの分布を，正規分布に従うとみなして考えることがある。

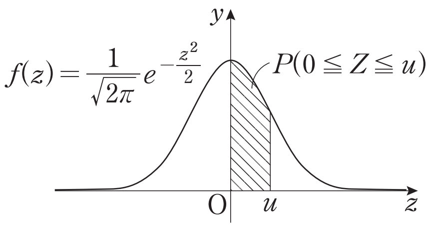
要点② 標準正規分布

期待値 $m=0$，標準偏差 $\sigma=1$ の正規分布　　　　を「　　　　　　　　」という。確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

であり，その分布曲線は右図のようになる。

右図の斜線部分の面積は確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ を表し，u の値に対する確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ の値をまとめたものが「正規分布表」である。



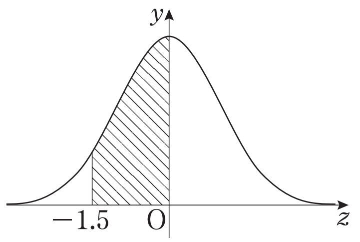
以下は正規分布表の一部である。

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき

$P(0\leqq Z\leqq 0.55)=$

$P(-1.5\leqq Z\leqq 0)=P(\quad\leqq Z\leqq\quad)=$



2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

(1) $P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$ (2) $P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

＜正規分布表＞

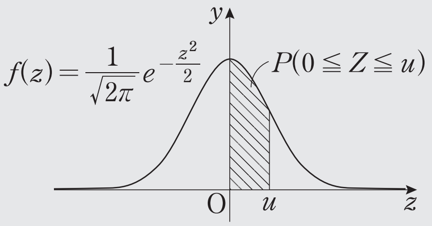
u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

標準正規分布と確率

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，右図の斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。

分布曲線が $z=0$（y 軸）に関して対称であることに注目。



第 9 講　PART2 確認問題

1 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の
＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1)　$P(-1.55 \leqq Z \leqq 0) = 0.$ アイウエ

(2)　$P(0.59 \leqq Z \leqq 1.02) = 0.$ オカキク

PART3 確率変数の標準化

要点 ① 確率変数の標準化

確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき

$$Z=\frac{X\qquad}{\qquad}$$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(\quad,\quad)$ に従うことが知られている。このように，確率変数 X を，標準正規分布に従う確率変数 Z に直すことを「　　　　　」といい，この Z を，X を標準化した確率変数という。

例 確率変数 X が正規分布 $N\left(1,\ 2^2\right)$ に従うとき，確率 $P(-2\leqq X\leqq 2)$ を求める。

$Z=\frac{X\qquad}{\qquad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=-2$ のとき　$Z=\frac{-2-1}{2}=-\frac{3}{2}=-1.5$

$X=2$ のとき　$Z=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}=0.5$

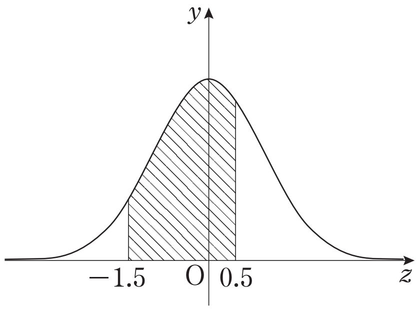
よって　$P(-2\leqq X\leqq 2)$

$=P(-1.5\leqq Z\leqq 0.5)$

$=P(-1.5\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.5)+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=0.4332+0.1915=0.6247$



要点 ② 正規分布の利用

日常の身近な問題を，正規分布を利用して考える。

例 ある高校の 2 年生男子の身長が，平均 170 cm，標準偏差 6 cm の正規分布に従うものとする。この 2 年生男子の中で，身長 167 cm 以上 173 cm 以下の生徒は約何 % いるかを求める。

身長を Xcm とすると，X は正規分布 $N(\quad,\quad)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-\quad}{\quad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(\ ,\ )$ に従う。

$X=167$ のとき　$Z=-0.5$　　　$X=173$ のとき　$Z=0.5$

よって　$P(167 \leqq X \leqq 173)$

$=P(-0.5 \leqq Z \leqq 0.5)$

$=P(-0.5 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 0.5)$

$=\quad P(0 \leqq Z \leqq 0.5)=2\cdot 0.1915=0.383$

したがって，約　　% いる。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

3 ある高校の 2 年生女子の身長が，平均 157.9 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うものとする。以下の＜正規分布表＞を用いて，次の問いに答えよ。

(1) この 2 年生女子の中で，身長 155 cm 以上 163 cm 以下の生徒は約何 % いるか。

(2) この 2 年生女子の中で，身長が平均を 10 cm 以上上回る生徒は約何 % いるか。

＜ 正規分布表 ＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

確率変数の標準化

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。このことを利用して，確率変数 X に関する確率を，確率変数 Z に関する確率として求めることができる。

第 9 講 PART3 確認問題

1 ある高校の生徒の通学時間が，平均 26 分，標準偏差 4 分の正規分布に従うものとする。以下の＜正規分布表＞を用いて，次の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1) 通学時間が 24 分以上 30 分以下の生徒は約 [アイ] %いる。

(2) 通学時間が 20 分以下の生徒は約 [ウ] %いる。

PART4 二項分布の正規分布による近似

要点 ① 二項分布の正規分布による近似

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p である試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると，X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。このとき

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r q^{n-r}\quad (q=1-p,\ r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

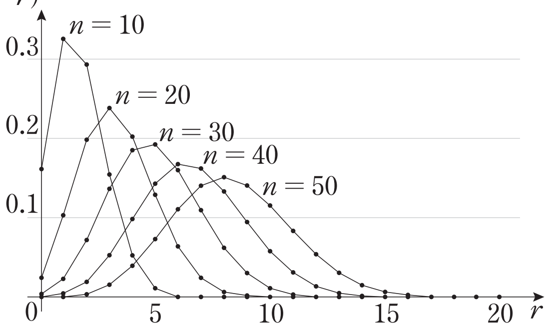
期待値 $E(X)=np$，　分散 $V(X)=npq$，　標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

である。

1 個のさいころを n 回投げる試行で 1 の目が出る回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。この X について，$P(X=r)$ を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

のそれぞれについて計算し，折れ線グラフで表すと右図のようになり，n の値が大きくなるにつれてグラフの形は左右対称の山型に近づいていく。

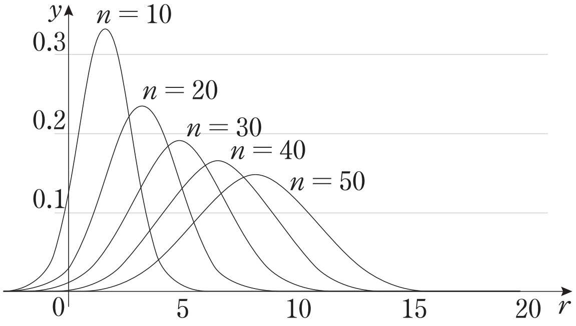


二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ の期待値は $n\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{n}{6}$，分散は $n\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5n}{36}$ である。

ここで，この二項分布と期待値，分散が等しい正規分布 $N\left(\dfrac{n}{6},\ \dfrac{5n}{36}\right)$ の分布曲線を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

について描くと，右図のようになり，二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ のグラフは，n が大きくなるにつれて正規分布 $N\left(\dfrac{n}{6},\ \dfrac{5n}{36}\right)$ のグラフに近づくことがわかる。



一般に，次のことが成り立つ。

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$ とする。

例　1 個のさいころを 720 回投げるとき，6 の目が出る回数が 110 回以下である確率を求める。

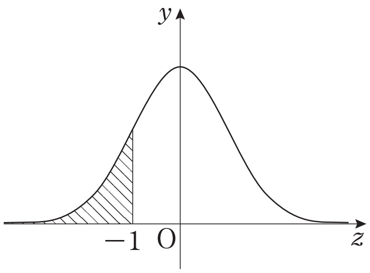
6 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布　　　　　　に従うから

$$E(X)=\qquad\quad =120,\qquad V(X)=\qquad\qquad =100,\qquad \sigma(X)=\qquad =10$$

$n=720$ は十分に大きいから，X は正規分布　　　　　　に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X\qquad}{\qquad}$ とすると，Z は標準正規分布　　　　に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\leqq 110)&=P(Z\leqq -1)\\&=P(Z\leqq 0)-P(-1\leqq Z\leqq 0)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$



< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4　1 枚の硬貨を 1600 回投げるとき，表の出る回数が 789 回以上である確率を求めよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき

正規分布 $N(np,\ npq)$　　$(q=1-p)$

に従うとみなしてよい。

正規分布で近似し，さらに確率変数の標準化を行うことで，正規分布表を用いて確率を求めることができる。

第 9 講　PART4 確認問題

1　1 個のさいころを 500 回投げるとき，1 の目が出る回数が 100 回以下である確率は 0. アイウエ である。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

第10講　統計的な推測

PART1　母集団と標本

要点①　母集団と標本

「全数調査」… 調査対象となる集団の全部について調べる調査

「標本調査」… 調査対象となる集団全体からその一部を抜き出して調べる調査

標本調査において

「母集団」… 調査対象となる集団全体

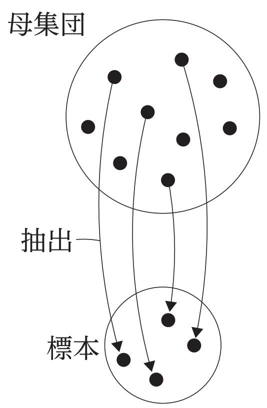
「個体」… 母集団に属する個々のもの

「母集団の大きさ」… 母集団に属する個体の総数

「標本」… 調査の母集団から選び出された一部分

「抽出」… 母集団から標本を選び出すこと

「標本の大きさ」… 標本に属する個体の総数



標本調査の目的は，抽出された標本の性質から，母集団の性質を推測することである。よって，標本に属する個体をかたよりなく母集団から抽出することが必要である。

「無作為抽出」… 母集団のどの個体も同じ確率で抽出する方法。
乱数さいや乱数表，コンピュータなどを利用して行う。

「無作為標本」… 無作為抽出によって抽出された標本

母集団から標本を抽出するとき，1 個の個体を抽出するたびにもとに戻してから，次の個体を抽出することを「復元抽出」といい，もとに戻さずに続けて抽出することを「非復元抽出」という。

要点② 母集団の分布

大きさNの母集団において，変量xの値がx_1，x_2，……，x_nである個体がそれぞれf_1，f_2，……，f_n個あるとする。

この母集団から，1個の個体を無作為に抽出し，その変量xの値をXとする。

各個体が抽出される確率はすべて等しいから，Xの確率分布は右の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\cdots$	$\frac{f_n}{N}$	1

この確率変数Xの確率分布を「　　　　　　」という。

また，Xの期待値を「　　　　」，分散を「　　　　」，

標準偏差を「　　　　　　」といい，それぞれm，σ^2，σで表す。

例　2と書かれたカードが30枚，4と書かれたカードが20枚，6と書かれたカードが10枚ある。この60枚のカードを母集団とし，カードの数字を変量とするとき，母集団分布，母平均m，母分散σ^2，母標準偏差σを求める。

母集団から1枚のカードを抽出し，そのカードに書かれた数字をXとすると，母集団分布は右の表のようになる。よって

X	2	4	6	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$m=2\cdot\frac{3}{6}+4\cdot\frac{2}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$$

$$\sigma^2=\left(2^2\cdot\frac{3}{6}+4^2\cdot\frac{2}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

1 1, 2, 3, 4 と書かれた球がそれぞれ1個, 2個, 3個, 4個ある。この10個の球を母集団とし, 球の数字を変量とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 母集団分布を求めよ。

(2) 母平均 m, 母分散 σ^2, 母標準偏差 σ を求めよ。

Point Pickup

母集団の分布

母集団から1個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき, X の確率分布を「母集団分布」という。

母平均　$m=E(X)$

母分散　$\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

母標準偏差　$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{V(X)}$

第 10 講 PART1 確認問題

1 10 点のカードが 20 枚，5 点のカードが 30 枚，1 点のカードが 50 枚ある。この 100 枚のカードを母集団とし，カードの点数を X とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 母集団分布を求めよ。

X	10	5	1	計
P	$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{100}$	$\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{100}$	$\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{100}$	1

(2) 母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

$$m = \boxed{\text{キ}}$$

$$\sigma^2 = \boxed{\text{クケ}}$$

$$\sigma = \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

PART2 標本平均の分布

要点① 標本平均の期待値，分散，標準偏差

ある母集団から大きさ n の標本を無作為抽出する。この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。このとき，これらの平均

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

X	X_1	X_2	…	X_n	$\overline{X}$
標本1			…		
標本2					
⋮					

を「　　　　　」という。X_1，X_2，……，X_n はそれぞれ，標本の抽出によって値が定まる確率変数であるから，標本平均 $\overline{X}$ もまた，標本の抽出によって値が定まる確率変数である。

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出し，この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。

この抽出が「　　　　　」の場合，X_1，X_2，……，X_n のそれぞれは，母集団から大きさ1の標本を抽出することで得られる確率変数とみなすことができ，それぞれ母集団と同じ確率分布をもつ。よって

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots\cdots=E(X_n)=m,\qquad V(X_1)=V(X_2)=\cdots\cdots=V(X_n)=\sigma^2$$

が成り立つ。このとき

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)=$$

X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であるから

$$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)=$$

したがって，標本平均 $\overline{X}$ の

期待値　$E(\overline{X})=E\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n}\cdot nm=m$

分散　$V(\overline{X})=V\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$

標準偏差　$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本の抽出が非復元抽出の場合は，X_1，X_2，……，X_n は互いに独立ではない。しかし，母集団の大きさ N が標本の大きさ n に比べて十分大きい場合は，復元抽出と非復元抽出の違いは小さい。よって，非復元抽出による標本を，復元抽出による標本とみなすことができる。

以上より，次のことが成り立つ。

標本平均の期待値，分散，標準偏差

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$　　分散 $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

例 母平均 60，母標準偏差 5 の母集団から，大きさ 9 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=\quad$ ，　分散 $V(\overline{X})=\text{——}=\dfrac{25}{9}$，　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\qquad=\dfrac{5}{3}$

要点 ② 標本平均の分布と正規分布

一般に , 母集団がどのような分布であっても , 次のことが成り立つことが知られている。

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，

その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

例 母平均 60，母標準偏差 10 の母集団から，大きさ 100 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 62 以上となる確率を求める。

標本平均 $\overline{X}$ の分布は近似的に $N\left(\quad ,\qquad\right)$，すなわち $N(60,\ 1^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-60}{1}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(\overline{X}\geqq 62)=P(Z\geqq 2)=0.5-0.4772=0.0228$

※母集団分布が正規分布のときは，標本の大きさ n に関係なく，標本平均 $\overline{X}$ の分布も正規分布に従う。

※標本の大きさ n を限りなく大きくしていくと，標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は限りなく 0 に近づき，$\overline{X}$ の分布は母平均 m の近くに限りなく集中する。つまり，標本平均 $\overline{X}$ は，標本の大きさ n を大きくしていくと，母平均 m に近づいていく。これを「大数の法則」という。

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

Point Pickup

標本平均の期待値，標準偏差

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$　　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

第10講　PART2 確認問題

1　母平均58，母標準偏差10の母集団から，標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，次の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852

(1)　大きさ25の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

$E(\overline{X})=$ アイ ，$\sigma(\overline{X})=$ ウ

(2)　大きさ225の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が57.5以上58.5以下となる確率は エ である。

エ に当てはまるものを下の①～⑥のうちから選べ。

①　0.1915　　②　0.2157　　③　0.2734

④　0.3830　　⑤　0.4314　　⑥　0.5468

PART3 母平均の推定

要点① 母平均の推定

標本調査の目的は，抽出された標本の性質から，母集団の性質を推測することである。ここでは，母平均がわかっていない母集団から無作為抽出された標本の標本平均を用いて，母平均を推定する。

母平均 m，母分散 σ^2 である母集団から抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について，n が十分に大きいとき，$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布　　　　　　に従う。よって，

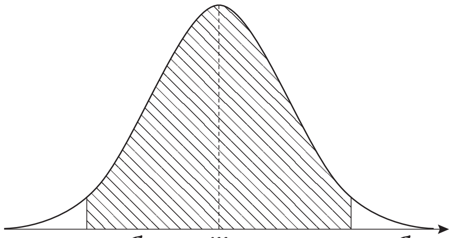
$Z=\dfrac{\overline{X}-\quad}{\quad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

ここで，$P(-u\leqq Z\leqq u)=0.95$ となる u を求めると，正規分布表より $u=$　　である。よって

$$P\left(-1.96\leqq\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqq 1.96\right)=0.95$$

と表される。この式のかっこの中を変形すると

$$P\left(m-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\overline{X}\leqq m+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$



であり，さらにかっこの中を m の値の範囲として表すと

$$P\left(\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

となる。この式は，区間 $\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ に母平均 m の値を含む確率が約95%であることを示している。この区間を，母平均 m に対する「　　　　」95%の「　　　　　」という。

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母平均 m に対して，信頼度 95% の信頼区間を求めることを，信頼度 95% で推定する，という。

例 ある試験を受けた生徒の中から，100 人を無作為抽出して調査したところ，その平均点は 59.8 点であった。母標準偏差を 13.0 点として，この試験を受けた生徒全体の平均点を，信頼度 95% で推定する。

標本平均は $\overline{X}=59.8$，母標準偏差は $\sigma=13.0$，標本の大きさは $n=100$ より，

信頼度 95% の信頼区間は

$$- \qquad \leqq m \leqq \qquad +$$

$$57.252 \leqq m \leqq 62.348$$

よって，母平均は信頼度 95% で 57.3 点以上 62.3 点以下 と推定される。

標本平均 $\overline{X}$ の値は，抽出される標本ごとに異なるため，実際の母平均の推定においては，標本を抽出して信頼区間を求めることを 1 度だけ行い，その結果を信頼区間として用いる。

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の場合，標本を抽出して信頼区間を求めることを多数回くり返すと，その中に母平均 m を含む区間が 95%程度あることが期待される。

母標準偏差 σ がわからないときは，標本の大きさ n が大きければ，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよいことが知られている。

3 ある工場で製造しているある製品から784個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均314.15gであった。母標準偏差を24gとして，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度95%で推定せよ。

Point Pickup

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母標準偏差 σ がわからないときは，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよい。

第10講 PART3 確認問題

1 ある農場で生産した卵の中から400個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均は53.4gであった。母標準偏差を2.5gとして，この農場で生産されている卵の重さの平均を信頼度95%で推定すると，［ア］となる。

［ア］に当てはまるものを下の①～④のうちから選べ。

① 48.5g以上58.3g以下
② 53.1g以上53.7g以下
③ 53.2g以上53.6g以下
④ 53.3g以上53.5g以下

PART4 仮説検定

要点 ① 仮説検定

「仮説検定」… ある仮説を立てて，それが成り立つかどうかを統計的に検証する手法

仮説検定の主な流れは以下の通り。

Ⅰ　主張したい仮説 H_1 を立てる。

Ⅱ　H_1 に反する仮説 H_0 を立てる。

Ⅲ　H_0 が正しいかどうかを統計的に検証し

(i) 正しくないと判断できる場合　　→ H_1 が正しいといえる

(ii) 正しくないとは判断できない場合 → H_1 が正しいとはいえない

仮説 H_0 を「　　　　　」，仮説 H_1 を「　　　　　」という。

Ⅲにおいて，帰無仮説 H_0 が正しくないと判断することを，帰無仮説を「　　　　　」という。

帰無仮説が棄却されるかどうかを判断するための基準となる確率を「　　　　　」(または危険率) という。帰無仮説のもとで，標本抽出の結果，またはその結果以上に極端な結果が得られる確率を求め，その確率が有意水準以下の場合，それはほとんど起こりえないと判断し，帰無仮説を棄却し，対立仮説を採択することができる。

求めた確率が有意水準より大きい場合は，帰無仮説を棄却できない。ただし，これにより帰無仮説が正しいと判断できるわけではない。

有意水準は，0.05(5%)，または 0.01(1%) とすることが多い。

例　ある 1 枚の硬貨を 100 回投げて，表が 60 回出た。この結果から，この硬貨は表が出やすいと判断してよいかを，有意水準を 5% として検定する。

対立仮説 H_1 は「この硬貨は　　　　　　　　」

帰無仮説 H_0 は「この硬貨は　　　　　　　　　　　　　　」

H_0 が正しいとするとき，この硬貨を投げて表が出る回数を X とすると，X は二項分布　　　　　　に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$m =$ 　　　　$= 50$，　$\sigma =$ 　　　　　　$= 5$

$n = 100$ は十分に大きいから，X は正規分布　　　　　　に従うとみなしてよい。

ここで，$Z = \dfrac{X \qquad}{\qquad}$ とすると，Z は標準正規分布　　　　　に従う。

$X=60$ のとき，$Z=$ 　 であるから，硬貨を 100 回投げて，表が 60 回　　　　出る確率は，正規分布表より

$$P(\qquad\quad) = P(\qquad\quad)$$

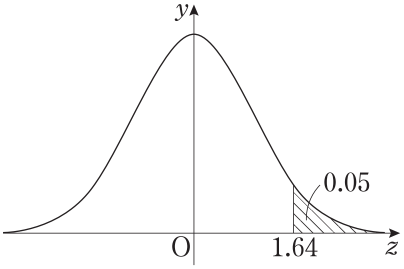
$$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

つまり，約 2.3% であり，有意水準 5% に比べて　　　　　。

よって，帰無仮説 H_0 は　　　　　　。

したがって，この硬貨は表が出やすいと　　　　　　　。

正規分布表より $P(Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.95$ であるから，$P(Z \geqq 1.64) \fallingdotseq 0.05$ である。つまり，$Z \geqq 1.64$ となる事象は，確率 5% でしか起こらない。$Z=2$ はこの範囲に含まれているから，$X=60$ は帰無仮説 H_0 のもとでは起こる可能性が低いことが起こった，ということができるため，H_0 は棄却できる。

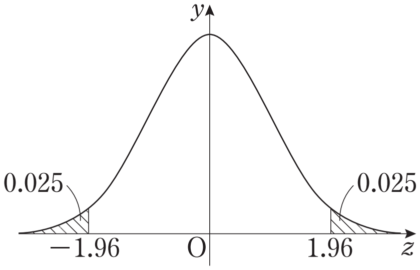


有意水準に対して，帰無仮説が棄却される確率変数の値の範囲を「 棄却域 」という。上の例においては，棄却域は $Z \geqq 1.64$ である。

「硬貨の表と裏の出方に差がある」ことを判断するために，表が出た回数が大きすぎる場合も小さすぎる場合も帰無仮説が棄却されるように，棄却域を両側にとる場合もある。有意水準 0.05 のときは

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

より，棄却域は $Z \leqq -1.96$，$1.96 \leqq Z$ である。



4 3人のアーティストA，B，Cは同じ程度の人気があると言われている。この3人のうち誰が好みかについて，無作為に選んだ288人に調査を行ったところ，Aを選んだ人が104人で，B，Cに比べて多かった。この結果から，A，B，Cの3人からAを選ぶ人の割合は$\frac{1}{3}$ではないと判断してよいか。有意水準を5%として検定せよ。

Point Pickup

仮説検定

仮説検定の主な流れは以下

① 主張したい仮説 H_1（対立仮説）に反する仮説 H_0（帰無仮説）を立てる。

② H_0 のもとで，標本調査の結果またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。

③ ②の結果が

有意水準以下の場合 → H_0 を棄却できる。
よって，H_1 が正しいと判断できる。

有意水準より大きい場合 → H_0 を棄却できない。
よって，H_1 が正しいとは判断できない。

第10講 PART4 確認問題

1 ある飲料メーカーが新商品を開発した。無作為に選んだ256人に，この飲料を試飲してもらい，従来の商品とどちらを好むか調査を行ったところ，新商品を好む人は142人であった。この結果から，新商品を好む人が多いと判断してよいか，有意水準を5%として検定せよ。

[ア]

[ア] に当てはまるものを下の①～④のうちから選べ。

① 新商品を好む人の方が多いと判断できる。

② 新商品を好む人の方が多いとは判断できない。

③ 新商品と従来の商品を好む人は同程度であると判断できる。

④ 従来の商品を好む人の方が多いと判断できる。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

テキスト　解答

第 1 講　数列，等差数列

PART1　数列

1　(1)　一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 5 項までを求めよ。

(i)　$a_n=2n-3$　　(ii)　$a_n=2^{n-1}$

(2)　数列 1，-2，4，-8，16 の初項，末項，項数をいえ。

[解答]

(1)(i)　$a_1=2\cdot1-3=-1$，$a_2=2\cdot2-3=1$，$a_3=2\cdot3-3=3$，

$a_4=2\cdot4-3=5$，$a_5=2\cdot5-3=7$

(ii)　$a_1=2^{1-1}=2^0=1$，$a_2=2^{2-1}=2^1=2$，$a_3=2^{3-1}=2^2=4$，

$a_4=2^{4-1}=2^3=8$，$a_5=2^{5-1}=2^4=16$

(2)　初項 1，末項 16，項数 5

PART2 等差数列

2 (1) 初項 -2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項と第 20 項を求めよ。

(2) 次の等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公差 d を求め，一般項を求めよ。

(i) 3，8，13，18，……　　(ii) 19，12，5，-2，……

[解答]

(1) $a_n=-2+(n-1)\cdot 3=3n-5$

$a_{20}=3\cdot 20-5=55$

(2)(i) 初項は $a=3$，公差は $d=8-3=5$

一般項は $a_n=3+(n-1)\cdot 5=5n-2$

(ii) 初項は $a=19$，公差は $d=12-19=-7$

一般項は $a_n=19+(n-1)\cdot(-7)=-7n+26$

PART3 等差数列の一般項

3 第2項が9，第6項が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 一般項を求めよ。

(2) 第20項を求めよ。

(3) -23 は第何項か。

[解答]

(1) 初項を a，公差を d とおくと，一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

$a_2 = 9$ より　$a + d = 9$　……　①

$a_6 = -7$ より $a + 5d = -7$　……　②

①，②より $a = 13$，$d = -4$

よって $a_n = 13 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 17$

(2) $a_{20} = -4\cdot 20 + 17 = -63$

(3) $a_n = -23$ より $-4n + 17 = -23$　　$n = 10$　　よって第10項

PART4 等差数列の和

4 (1) 初項 29，末項 1，項数 8 の等差数列の和 S を求めよ。

(2)(i) 初項 1，公差 2，項数 20 の等差数列の和 S を求めよ。

(ii) 初項 2，公差 5 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[解答]

(1) $S=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot(29+1)=120$

(2)(i) $S=\dfrac{1}{2}\cdot20\cdot\{2\cdot1+(20-1)\cdot2\}=400$

(ii) $S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot2+(n-1)\cdot5\}=\dfrac{1}{2}n(5n-1)$

第 2 講　等比数列

PART1　等比数列

1

(1)　初項 -5，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項と第 5 項を求めよ。

(2)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求め，一般項を求めよ。

(i)　$48,\ 12,\ 3,\ \dfrac{3}{4},\ \cdots\cdots$　　(ii)　$2,\ -10,\ 50,\ -250,\ \cdots\cdots$

[解答]

(1)　$a_n=-5\cdot 2^{n-1}$

$a_5=-5\cdot 2^4=-80$

(2)(i)　初項は $a=48$，公比は $r=12\div 48=\dfrac{1}{4}$

一般項は $a_n=48\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

(ii)　初項は $a=2$，公比は $r=-10\div 2=-5$

一般項は $a_n=2\cdot(-5)^{n-1}$

PART2 等比数列の一般項

2

(1) 第４項が 81，第６項が 729 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 第２項が 48，第５項が -6 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

[解答]

(1) 初項を a，公比を r とおくと，一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

$a_4 = 81$ より　$ar^3 = 81$　……　①

$a_6 = 729$ より　$ar^5 = 729$　……　②

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar^3} = \dfrac{729}{81}$　　$r^2 = 9$　　よって $r = \pm 3$

$r = 3$ のとき

①より　$27a = 81$　　$a = 3$

よって　$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$r = -3$ のとき

①より $-27a = 81$　　$a = -3$

よって $a_n = -3 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^n$

したがって，一般項は　$a_n = 3^n$ または $a_n = (-3)^n$

(2) 初項を a，公比を r とおくと，一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

$a_2 = 48$ より　$ar = 48$　……　①

$a_5 = -6$ より　$ar^4 = -6$　……　②

②÷①より $\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{-6}{48}$　　$r^3 = -\dfrac{1}{8}$　　r は実数より $r = -\dfrac{1}{2}$

このとき①より　$-\dfrac{1}{2}a = 48$　　$a = -96$

よって，一般項は　$a_n = -96 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

PART3 等比数列の和

3 (1) 初項 5，公比 2，項数 6 の等比数列の和 S を求めよ。

(2) 初項 8，公比 -3，項数 5 の等比数列の和 S を求めよ。

(3) 初項 1，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[解答]

(1) $S=\dfrac{5(2^6-1)}{2-1}=5\cdot63=315$

(2) $S=\dfrac{8\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=2\cdot244=488$

(3) $S_n=\dfrac{1\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

第 3 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σ

1　(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$　　(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$

(2)　次の式を，和の記号 Σ を用いて表せ。

(i)　$2+4+6+8+10$　　(ii)　$3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$

(3)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-3)^{k-1}$ を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}$

(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3k+1) = (3\cdot1+1)+(3\cdot2+1)+(3\cdot3+1)+(3\cdot4+1)$

$= 4+7+10+13$

(2)(i)　$\displaystyle 2+4+6+8+10 = \sum_{k=1}^{5} 2k$

(ii)　$\displaystyle 3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2 = \sum_{k=3}^{n} k^2$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-3)^{k-1} = \frac{1\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{1}{4}\{1-(-3)^n\}$

PART2 自然数の和の公式，$\sum$の性質

2 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(-5)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}6k$　　(3) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

[解答]

(1) $\sum_{k=1}^{n}(-5)=-5n$

(2) $\sum_{k=1}^{n}6k=6\sum_{k=1}^{n}k=6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=3n(n+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}(-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$

$=n(n+1)-n$

$=n^2$

PART3 自然数の2乗の和の公式

3 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} 3k^2$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \left(k^2-3k+2\right)$

[解答]

(1) $\sum_{k=1}^{n} 3k^2 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$= 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \left(k^2-3k+2\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{9}{6}n(n+1) + \frac{12}{6}n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\}$$

$$= \frac{1}{6}n\left(2n^2-6n+4\right)$$

$$= \frac{1}{3}n\left(n^2-3n+2\right)$$

$$= \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

PART4 階差数列と一般項

4 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 1，2，7，16，29，……　　(2) 3，4，7，16，43，……

[解答]

(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，5，9，13，……

これは，初項1，公差4の等差数列より，$b_n=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$$

$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-3(n-1)=2n^2-5n+4$$

この式において，$n=1$ のとき $2\cdot 1^2-5\cdot 1+4=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=2n^2-5n+4$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，9，27，……

これは，初項1，公比3の等比数列より，$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

$$=3+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=3+\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{5}{2}$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 3^0+\frac{5}{2}=3$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{5}{2}$

第 4 講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項

1　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=3n^2+2n$　　　(2)　$S_n=2^n-1$

[解答]

(1)　$a_1=S_1=3\cdot1^2+2\cdot1=5$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(3n^2+2n)-\{3(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=(3n^2+2n)-(3n^2-4n+1)\\&=6n-1\end{aligned}$$

この式で，$n=1$ のとき $6\cdot1-1=5$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=6n-1$

(2)　$a_1=S_1=2^1-1=1$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)\\&=2^n-2^{n-1}\\&=2\cdot2^{n-1}-1\cdot2^{n-1}=(2-1)\cdot2^{n-1}=2^{n-1}\end{aligned}$$

この式で，$n=1$ のとき $2^{1-1}=2^0=1$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=2^{n-1}$

PART2 分数で表された数列の和

2 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

[解答]

(1) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

よって $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

(2) $S=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2n+1)-1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2n}{2n+1}=\dfrac{n}{2n+1}$

第 5 講　漸化式と数学的帰納法

PART1　漸化式

1　次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-2$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2n$

[解答]

(1)　$a_1=2$

$a_2=a_1-2=2-2=0$

$a_3=a_2-2=0-2=-2$

$a_4=a_3-2=-2-2=-4$

$a_5=a_4-2=-4-2=-6$

(2)　$a_1=3$

$a_2=3a_1-2\cdot1=3\cdot3-2=7$

$a_3=3a_2-2\cdot2=3\cdot7-4=17$

$a_4=3a_3-2\cdot3=3\cdot17-6=45$

$a_5=3a_4-2\cdot4=3\cdot45-8=127$

PART2 漸化式と一般項

2 (1) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=-3$，$a_{n+1}=a_n+5$　　(ii) $a_1=9$，$a_{n+1}=3a_n$

(2) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+8n$　　(ii) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

[解答]

(1)(i) 初項 -3，公差 5 の等差数列を表す。

よって $a_n=-3+(n-1)\cdot 5=5n-8$

(ii) 初項 9，公比 3 の等比数列を表す。

よって $a_n=9\cdot 3^{n-1}=3^2\cdot 3^{n-1}=3^{n+1}$

(2)(i) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=8n$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=4+\sum_{k=1}^{n-1}8k=4+8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=4\left(n^2-n+1\right)$$

$a_1=4$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=4\left(n^2-n+1\right)$

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=4^n$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=2+\frac{4\left(4^{n-1}-1\right)}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=\dfrac{4^n+2}{3}$

PART3 $a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

3 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=6$，$a_{n+1}=3a_n-8$　　(2) $a_1=-1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-3$

[解答]

(1) $a_{n+1}=3a_n-8$ を変形すると　$a_{n+1}-4=3(a_n-4)$

よって，数列 $\{a_n-4\}$ は，初項　$a_1-4=6-4=2$，公比 3 の等比数列である。

したがって $a_n-4=2\cdot3^{n-1}$　より　求める一般項は $a_n=2\cdot3^{n-1}+4$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-3$ を変形すると　$a_{n+1}+6=\frac{1}{2}(a_n+6)$

よって，数列 $\{a_n+6\}$ は，初項 $a_1+6=-1+6=5$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって $a_n+6=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より 求める一般項は $a_n=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-6$

PART4 数学的帰納法

4 数学的帰納法により，次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[解答]

$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$ …… ① とする。

[1] $n=1$ のとき　①の左辺$=1$，①の右辺$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(3\cdot 1-1)=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}①の左辺 &= 1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\} \\ &= 1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+(3k+1) \\ &= \frac{1}{2}k(3k-1)+(3k+1) \\ &= \frac{1}{2}\{k(3k-1)+2(3k+1)\} \\ &= \frac{1}{2}(3k^2+5k+2) \\ &= \frac{1}{2}(3k+2)(k+1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

第 6 講　確率分布

PART1　確率変数と確率分布

1　赤球4個，白球3個の入った袋から，2個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数をXとする。

(1)　Xの確率分布を求めよ。

(2)　$P(X \leqq 1)$を求めよ。

[解答]

(1)　確率変数Xのとりうる値は0，1，2

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

よって，Xの確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

(2)　$P(X \leqq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5}{7}$

PART2 確率変数の期待値

2 3枚の硬貨を同時に投げて，表が出る枚数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

［解答］

X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{8}(0\cdot1+1\cdot3+2\cdot3+3\cdot1)=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

PART3 確率変数の分散と標準偏差

3 当たりくじ2本を含む10本のくじがある。このくじを同時に5本引いたときの当たりくじの本数を X とするとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

[解答]

確率変数 X のとりうる値は0，1，2

$$P(X=0)=\frac{{}_8C_5}{{}_{10}C_5}=\frac{56}{252}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_8C_4}{{}_{10}C_5}=\frac{140}{252}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_8C_3}{{}_{10}C_5}=\frac{56}{252}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{56}{252}$	$\frac{140}{252}$	$\frac{56}{252}$	1

X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{56}{252}+1\cdot\frac{140}{252}+2\cdot\frac{56}{252}=1$$

X の分散は

$$V(X)=(0-1)^2\cdot\frac{56}{252}+(1-1)^2\cdot\frac{140}{252}+(2-1)^2\cdot\frac{56}{252}=\frac{112}{252}=\frac{4}{9}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

（分散の別解）

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=0^2\cdot\frac{56}{252}+1^2\cdot\frac{140}{252}+2^2\cdot\frac{56}{252}-1^2=\frac{364}{252}-1=\frac{112}{252}=\frac{4}{9}$$

PART4 確率変数の変換

4 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，確率変数 $6X-5$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

[解答]

$$E(X)=1\cdot\frac{6}{12}+2\cdot\frac{3}{12}+3\cdot\frac{2}{12}+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{6}{12}+2^2\cdot\frac{3}{12}+3^2\cdot\frac{2}{12}+4^2\cdot\frac{1}{12}-\left(\frac{11}{6}\right)^2=\frac{52}{12}-\frac{121}{36}=\frac{35}{36}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{36}}=\frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって　$E(6X-5)=6E(X)-5=6\cdot\frac{11}{6}-5=6$

$$V(6X-5)=6^2\,V(X)=6^2\cdot\frac{35}{36}=35$$

$$\sigma(6X-5)=|6|\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}=\sqrt{35}$$

※$\sigma(6X-5)=\sqrt{V(6X-5)}=\sqrt{35}$

第 7 講　確率変数の和と積

PART1 確率変数の和の期待値

1 100円硬貨1枚と10円硬貨1枚を同時に投げる。

(1) 表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2) 表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

[解答]

表が出た100円硬貨，10円硬貨の枚数をそれぞれ X 枚，Y 枚とすると，確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(1) 表が出た硬貨の枚数の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(2) 表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)=100\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2}=55\,(\text{円})$$

PART2 独立な確率変数

2 2つの確率変数 X, Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) $X+Y$ の分散を求めよ。

[解答]

(1) $E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(Y)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{2}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1$

X, Y は独立より

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

(2) $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{2}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

X, Y は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

第 8 講　二項分布

PART1　二項分布

1　1枚の硬貨を4回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　X の確率分布を求めよ。

[解答]

(1)　1回の試行で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$

この試行を4回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

(2)　$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{4-r}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

であり

$$P(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16},\qquad P(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16},$$

$$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16},\qquad P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16},$$

$$P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

PART2 二項分布の期待値，分散，標準偏差

2 1個のさいころを300回投げるとき，6の目が出る回数をXとする。

(1) Xの期待値を求めよ。

(2) Xの分散を求めよ。

(3) Xの標準偏差を求めよ。

[解答]

Xは二項分布 $B\left(300,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

(1) $E(X)=300\cdot\dfrac{1}{6}=50$

(2) $V(X)=300\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{125}{3}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{125}{3}}=\dfrac{5\sqrt{15}}{3}$

第 9 講　正規分布

PART1　連続分布

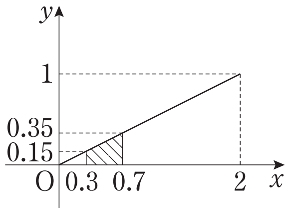
1　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\frac{1}{2}x\,(0\leqq x\leqq 2)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)$　　　(2)　$P(0\leqq X\leqq 2)$

[解答]

(1)　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)=\frac{1}{2}\cdot(0.15+0.35)\cdot 0.4=0.1$

(2)　$P(0\leqq X\leqq 2)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$



PART2 正規分布

2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

(1) $P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$　　(2) $P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

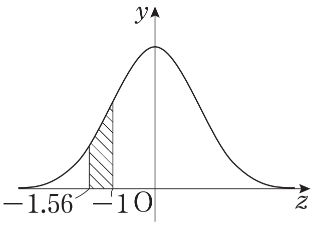
(1) $P(0 \leqq Z \leqq 0.53) = 0.2019$

(2) $P(-1.56 \leqq Z \leqq -1) = P(1 \leqq Z \leqq 1.56)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.56) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.4406 - 0.3413$

$= 0.0993$



PART3 確率変数の標準化

3 ある高校の2年生女子の身長が，平均157.9cm，標準偏差5cmの正規分布に従うものとする。以下の<正規分布表>を用いて，次の問いに答えよ。

(1) この2年生女子の中で，身長155cm以上163cm以下の生徒は約何%いるか。

(2) この2年生女子の中で，身長が平均を10cm以上上回る生徒は約何%いるか。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

身長をXcmとすると，Xは正規分布$N(157.9,\ 5^2)$に従う。

$Z=\dfrac{X-157.9}{5}$とおくと，Zは標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う。

(1) $X=155$のとき　$Z=-0.58$　　　$X=163$のとき　$Z=1.02$

よって　$P(155\leqq X\leqq 163)$

$=P(-0.58\leqq Z\leqq 1.02)$

$=P(-0.58\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.02)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.58)+P(0\leqq Z\leqq 1.02)$

$=0.2190+0.3461=0.5651$

したがって，約57%いる。

(2) $X=167.9$のとき　$Z=2$

よって　$P(X\geqq 167.9)$

$=P(Z\geqq 2)$

$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

したがって，約 2% いる。

PART4 二項分布の正規分布による近似

4 1 枚の硬貨を 1600 回投げるとき，表の出る回数が 789 回以上である確率を求めよ。

＜ 正規分布表 ＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

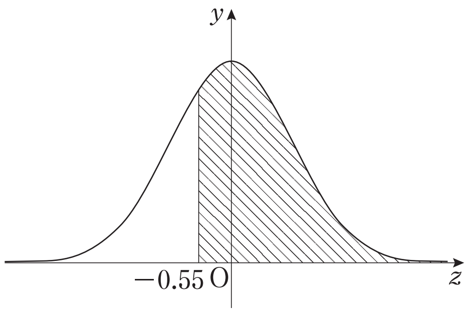
表が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(1600,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X)=1600\cdot\frac{1}{2}=800,\quad V(X)=1600\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=400,\quad \sigma(X)=\sqrt{400}=20$$

$n=1600$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N\left(800,\ 20^2\right)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-800}{20}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X\geqq 789)&=P(Z\geqq -0.55)\\ &=P(-0.55\leqq Z\leqq 0)+P(Z\geqq 0)\\ &=P(0\leqq Z\leqq 0.55)+P(Z\geqq 0)\\ &=0.2088+0.5\\ &=0.7088 \end{aligned}$$



第10講　統計的な推測

PART1　母集団と標本

1　1, 2, 3, 4 と書かれた球がそれぞれ1個, 2個, 3個, 4個ある。この10個の球を母集団とし，球の数字を変量とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　母集団分布を求めよ。

(2)　母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

[解答]

母集団から1つの球を抽出し，その球に書かれた数字を X とする。

(1)　母集団分布は右の表

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

(2)　$m=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{4}{10}=\frac{30}{10}=3$

$\sigma^2=\left(1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{2}{10}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{4}{10}\right)-3^2$

$=\frac{100}{10}-9=1$

$\sigma=\sqrt{1}=1$

PART2 標本平均の分布

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

[解答]

(1) $\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=170$，標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(170,\ \dfrac{5^2}{100}\right)$，すなわち $N\left(170,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。

$\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-170}{\frac{1}{2}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(169\leqq\overline{X}\leqq171)=P(-2\leqq Z\leqq2)=2P(0\leqq Z\leqq2)=2\cdot0.4772=0.9544$

PART3 母平均の推定

3 ある工場で製造しているある製品から 784 個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均 314.15 g であった。母標準偏差を 24 g として，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度 95% で推定せよ。

[解答]

標本平均は $\overline{X}=314.15$，母標準偏差は $\sigma=24$，標本の大きさは $n=784$ より，

信頼度 95% の信頼区間は

$$314.15-1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}} \leqq m \leqq 314.15+1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}}$$

$$314.15-1.96\cdot\frac{6}{7} \leqq m \leqq 314.15+1.96\cdot\frac{6}{7}$$

$$312.47 \leqq m \leqq 315.83$$

よって，母平均は信頼度 95% で 312.47 g 以上 315.83 g 以下 と推定される。

PART4 仮説検定

4 3人のアーティストA，B，Cは同じ程度の人気があると言われている。この3人のうち誰が好みかについて，無作為に選んだ288人に調査を行ったところ，Aを選んだ人が104人で，B，Cに比べて多かった。この結果から，A，B，Cの3人からAを選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではないと判断してよいか。有意水準を5%として検定せよ。

[解答]

対立仮説 H_1 は「Aを選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではない」である。

帰無仮説 H_0 は「Aを選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$」である。

H_0 が正しいとするとき，Aを選ぶ人数を X とすると，X は二項分布 $B\left(288,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=288\cdot\frac{1}{3}=96,\qquad \sigma=\sqrt{288\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=8$$

$n=288$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(96,\ 8^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-96}{8}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=104$ のとき，$Z=1$ であるから，288人中104人以上がAを選ぶ確率は，
正規分布表より

$$P(X\geqq 104)=P(Z\geqq 1)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)=0.5-0.3413=0.1587$$

つまり，約15.9%であり，有意水準5%に比べて大きい。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できない。

したがって，Aを選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではないとは判断できない。

確認問題　解答

第 1 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：8

[解説]

数列を $\{a_n\}$ とする。

初項は，

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$ [A]

第 3 項は，

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

[A]　第●項は，一般項の n に $n=$ ● を代入する。

2

[正解] ウ：2，エオ：30

[解説]

数列を $\{a_n\}$ とする。

初項は，

$$a_1 = 1 \cdot 2 = 2$$ [B]

第 5 項は，

$$a_5 = 5 \cdot 6 = 30$$

[B]　第●項は，一般項の n に $n=$ ● を代入する。

3

[正解] カ：1，キク：13，ケ：7

[解説]

数列 1，3，5，7，9，11，13 において，

初項は，**1** [C]

末項は，**13**

項数は，**7**

[C]　初項…最初の項
末項…最後の項
項数…項の個数

第1講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：3，ウエ：37

[解説]

初項1，公差4の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 4 \quad \text{[A]}$$
$$= \mathbf{4n - 3}$$

第10項は，

$$a_{10} = 4\cdot 10 - 3 = \mathbf{37}$$

[A]　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，
$a_n = a + (n-1)d$

2

[正解] オ：4，カ：3，キ：3，ク：1

[解説]

$\{a_n\}$：4，7，10，13，……

初項は **4**

公差は **3**

一般項は，

$$a_n = 4 + (n-1)\cdot 3 \quad \text{[B]}$$
$$= \mathbf{3n + 1}$$

[B]　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，
$a_n = a + (n-1)d$

3

[正解] ケコ：10，サ：4，シ：4，スセ：14

[解説]

$\{a_n\}$：10，6，2，−2，……

初項は **10**

公差は **−4**

一般項は，

$$a_n = 10 + (n-1)\cdot(-4) \quad \text{[C]}$$
$$= \mathbf{-4n + 14}$$

[C]　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，
$a_n = a + (n-1)d$

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：4

[解説]

初項を a，公差を d とおくと，

$$a_n = a+(n-1)d$$

$a_4 = 8$ より，$a+3d=8$　……①　[A]

$a_7 = 17$ より，$a+6d=17$　……②

①，②より，$a=-1$，$d=3$

よって，

$$a_n = -1+(n-1)\cdot 3 = \mathbf{3n-4}$$

[A]　a と d の連立方程式をつくって解く。

2　**[正解]** ウエ：56

[解説]

$$a_n = 3n-4$$

第 20 項は，

$$a_{20} = 3\cdot 20-4 = \mathbf{56}$$ [B]

[B]　a_n に $n=20$ を代入する。

3　**[正解]** オカ：28

[解説]

$a_n = 80$ より，

$$3n-4=80$$ [C]

$$3n=84$$

$$n=28$$

よって，80 はこの数列の第 **28** 項である。

[C]　$a_n=80$ という方程式を解いて，n を求める。

第1講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：80

[解説]

初項5，末項15，項数8の等差数列の和 S は，

$$S=\frac{8(5+15)}{2}=\mathbf{80}$$ [A]

[A]　初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

2 **[正解]** ウエオ：145

[解説]

初項1，公差3，項数10の等差数列の和 S は，

$$S=\frac{10\{2\cdot1+(10-1)\cdot3\}}{2}$$ [B]

$$=5\times29=\mathbf{145}$$

[B]　初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

3 **[正解]** カ：3，キ：7

[解説]

初項 -4，公差6，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-4)+(n-1)\cdot6\}$$ [C]

$$=\frac{n}{2}(6n-14)$$

$$=\boldsymbol{n(3n-7)}$$

[C]　初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

第2講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イ：2，ウエ：80

[解説]

初項5，公比2の等比数列の一般項は，

$$a_n = \mathbf{5 \cdot 2^{n-1}}$$ [A]

第5項は，

$$a_5 = 5 \cdot 2^4 = \mathbf{80}$$

[A]　初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，
$a_n = ar^{n-1}$

2　**[正解]** オ：2，カ：3，キ：2，ク：3

[解説]

$$2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \cdots\cdots$$

初項は，**2**

公比は，$\mathbf{-3}$ [B]

一般項は，$a_n = \mathbf{2 \cdot (-3)^{n-1}}$ [C]

[B]　$(-6) \div 2 = -3$

[C]　初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，
$a_n = ar^{n-1}$

3　**[正解]** ケコ：40，サ：2，シス：40，セ：2

[解説]

$$40,\ 20,\ 10,\ 5,\ \cdots\cdots$$

初項は，**40**

公比は，$\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ [D]

一般項は，$a_n = \mathbf{40 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$ [E]

[D]　$20 \div 40 = \dfrac{1}{2}$

[E]　初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，
$a_n = ar^{n-1}$

第2講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：3，エ：2

[解説]

初項を a，公比を r とすると，

$$a_n = ar^{n-1}$$

$a_4 = 24$ より，$ar^3 = 24$　……①　[A]

$a_6 = 96$ より，$ar^5 = 96$　……②

② ÷ ①より，$\dfrac{ar^5}{ar^3} = \dfrac{96}{24}$　[B]

$$r^2 = 4$$

よって，$r = \pm 2$

$r = 2$ のとき，①より，$a = 3$

よって，$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$

$r = -2$ のとき，①より，$a = -3$

よって，$\boldsymbol{a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}}$

[A]　a と r の連立方程式をつくって解く。

[B]　a を消去する。

2

[正解] オ：2，カ：3

[解説]

初項を a，公比を r とすると，

$$a_n = ar^{n-1}$$

$a_3 = 18$ より，$ar^2 = 18$　……①　[C]

$a_6 = -486$ より，$ar^5 = -486$　……②

② ÷ ①より，$\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{-486}{18}$　[D]

$$r^3 = -27$$

公比は実数より，$r = -3$

このとき，①より，$9a = 18$　　$a = 2$

したがって，求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}}$$

[C]　a と r の連立方程式をつくって解く。

[D]　a を消去する。

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：381

[解説]

初項 3，公比 2，項数 7 の等比数列の和 S は，

$$S=\frac{3(2^7-1)}{2-1} \quad \text{[A]}$$

$$=3\cdot 127=\mathbf{381}$$

[A]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき，

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

2

[正解] エオ：61

[解説]

初項 1，公比 -3，項数 5 の等比数列の和 S は，

$$S=\frac{1\cdot\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1+243}{4}=\mathbf{61}$$

[B]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき，

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

3

[正解] カ：5，キ：1，ク：2

[解説]

初項 2，公比 5 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n=\frac{2(5^n-1)}{5-1} \quad \text{[C]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{5^n-1}{2}}$$

[C]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき，

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_k = \boldsymbol{a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_{n+1}}$$ [A]

[A]　$\sum_{k=1}^{n} a_k$
$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$

2

[正解] イ：7，ウエ：11

[解説]

$$\sum_{k=1}^{4} (2k+3) = (2\cdot1+3)+(2\cdot2+3)+(2\cdot3+3)+(2\cdot4+3)$$ [B]

$$= \boldsymbol{5+7+9+11}$$

[B]　$\sum_{k=1}^{n} a_k$
$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$

3

[正解] オ：5，カ：3

[解説]

$$3+6+9+12+15$$
$$= 3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5$$
$$= \boldsymbol{\sum_{k=1}^{5} 3k}$$ [C]

[C]　数列 3，6，9，12，15 の第 k 項が $3k$ である。

4

[正解] キク：10，ケ：5

[解説]

$$5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$$
$$= \boldsymbol{\sum_{k=5}^{10} k^2}$$ [D]

[D]　k^2 の k に 5 から 10 まで代入して加えたものである。

5 **[正解]** コサ：-2，シ：3

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}$$
$$=1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots\cdots+(-2)^{n-1}$$

これは，初項1，公比 -2 の等比数列の初項から第 n 項までの和を表すから，

$$\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}=\frac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$ [E]
$$=\boldsymbol{\frac{1-(-2)^n}{3}}$$

[E]　初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和は，$r\neq1$ のとき，
$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 7 = \boldsymbol{7n}$$ [A]

[A]　$\sum_{k=1}^{n} c = cn$　(c は定数)

2

[正解] イ：4，ウ：1

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 8k = 8\sum_{k=1}^{n} k$$ [B]

$$= 8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$ [C]

$$= \boldsymbol{4n(n+1)}$$

[B]　$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$　(c は定数)

[C]　$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

3

[正解] エ：2，オ：5

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{n} 3$$ [D]

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 3n$$ [E]

$$= 2n^2 + 5n$$

$$= \boldsymbol{n(2n+5)}$$

[D]　Σ を分けて表す。

[E]　$\sum_{k=1}^{n} c = cn$　(c は定数)

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

第3講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2，ウ：1

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 6k^2 = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{[A]}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \text{[B]}$$

$$= \boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}$$

[A] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ （c は定数）

[B] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

2 **[正解]** エ：3，オ：3，カ：5

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2+k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \quad \text{[C]}$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) + n \quad \text{[D]}$$

$$= \frac{1}{6} n\{(n+1)(2n+1) + 3(n+1) + 6\}$$

$$= \frac{n}{6}(2n^2+6n+10)$$

$$= \boldsymbol{\frac{n}{3}(n^2+3n+5)}$$

[C] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

[D] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$ （c は定数）

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3，ウ：2，エ：2

[解説]

$\{a_n\}$：1　　6　　13　　22　　33　……

$\{b_n\}$：　5　　7　　9　　11　　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 5，公差 2 の等差数列であるから，

$$b_n=5+(n-1)\cdot 2 \quad \text{[A]}$$
$$=\mathbf{2n+3}$$

> [A]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は，
> $a_n=a+(n-1)d$

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \text{[B]}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$$
$$=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)$$
$$=n^2+2n-2$$

> [B]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき，
> $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

この式において，$n=1$ のとき，

$1^2+2\cdot 1-2=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n=n^2+2n-2}$$

2 **[正解]** オ：3，カ：2，キ：1

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

$\{a_n\}$：2　　5　　11　　23　　47　……

$\{b_n\}$：　3　　6　　12　　24　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n=3\cdot 2^{n-1}$$ [C]

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$=2+\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$$ [D]

$$=2+\frac{3\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}$$

$$=3\cdot 2^{n-1}-1$$

この式において，$n=1$ のとき，

$3\cdot 2^{1-1}-1=2$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n=3\cdot 2^{n-1}-1}$$

[C]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は，

$$a_n=ar^{n-1}$$

[D]　$\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 $(n-1)$ 項までの和である。

第4講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3

[解説]

$a_1=S_1=1^2+4\cdot1=5$ である。

また，$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1} \quad \text{[A]}$$
$$=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$$
$$=(n^2+4n)-(n^2+2n-3)$$
$$=2n+3$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot1+3=5$ となり，a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\boldsymbol{a_n=2n+3}$

[A]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，
$a_1=S_1$
$n\geqq2$ のとき，
$a_n=S_n-S_{n-1}$

2

[正解] ウ：3，エ：2，オ：3

[解説]

$a_1=S_1=3^1=3$ である。

また，$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1} \quad \text{[B]}$$
$$=3^n-3^{n-1}$$
$$=3\cdot3^{n-1}-3^{n-1}$$
$$=(3-1)\cdot3^{n-1}$$
$$=2\cdot3^{n-1}$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot3^{1-1}=2$ となり，a_1 と一致しない。

よって，この式は $n=1$ のときは成り立たない。

したがって，

$$\boldsymbol{a_1=3}$$

$n\geqq2$ のとき，$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$

[B]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，
$a_1=S_1$
$n\geqq2$ のとき，
$a_n=S_n-S_{n-1}$

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥，イ：⑤，ウ：①，エ：①

[解説]

（証明）

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{(2k+1)-(2k-1)}}{(2k-1)(2k+1)} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{2k+1}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{2k-1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{1}}{2k-1}-\frac{\boldsymbol{1}}{2k+1}$$

よって，$\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}$

（証明終わり）

[A]　分子の 2 を，$2k-1$ と $2k+1$ を使って表すことを考える。
このようにすることで，約分ができる。

2

[正解] オカ：24，キク：25

[解説]

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1} \quad \text{[B]}$$

であるから，

[B]　この式変形に着目して，元の式を変形する。

$$\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{2}{23\cdot25}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cdots\cdots+\cancel{\frac{1}{23}}-\frac{1}{25} \quad \text{[C]}$$

$$=1-\frac{1}{25}$$

$$=\frac{24}{25}$$

[C]　隣り合う項どうしで消し合う。

第５講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：7，ウエ：10

[解説]

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$

$a_2=a_1+3$ [A]

$=1+3=\mathbf{4}$

$a_3=a_2+3$

$=4+3=\mathbf{7}$

$a_4=a_3+3$

$=7+3=\mathbf{10}$

[A]　漸化式に $n=1$，2，3 を順に代入する。

2

[正解] オ：5，カ：8，キク：13

[解説]

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n$

$a_2=2a_1-1$ [B]

$=2\cdot3-1$

$=\mathbf{5}$

$a_3=2a_2-2$

$=2\cdot5-2$

$=\mathbf{8}$

$a_4=2a_3-3$

$=2\cdot8-3$

$=\mathbf{13}$

[B]　漸化式に $n=1$，2，3 を順に代入する。

第5講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：3

[解説]

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4$ [A]

数列 $\{a_n\}$ は，初項 1，公差 4 の等差数列であるから，

$$a_n=1+(n-1)\cdot 4 \quad \text{[B]}$$
$$=\boldsymbol{4n-3}$$

[A]　$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+d$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公差 d の等差数列

[B]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は，
$a_n=a+(n-1)d$

2

[正解] ウ：2，エ：5

[解説]

$a_1=2$，$a_{n+1}=5a_n$ [C]

数列 $\{a_n\}$ は，初項 2，公比 5 の等比数列であるから，

$$\boldsymbol{a_n=2\cdot 5^{n-1}} \quad \text{[D]}$$

[C]　$a_1=a$，$a_{n+1}=ra_n$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公比 r の等比数列

[D]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は，
$a_n=ar^{n-1}$

3

[正解] オ：3，カ：3，キ：1

[解説]

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+6n$ [E]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$$b_n=6n$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad \text{[F]}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}6k$$
$$=1+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=3n^2-3n+1$$

$a_1=1$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=3n^2-3n+1}$

[E]　$a_{n+1}-a_n=6n$
$6n$ が階差数列の一般項になる。

[F]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq 2$ のとき，
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

4 [正解] ク：2，ケ：1

[解説]

$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2^n$ [G]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$$b_n=2^n$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad \text{[H]}$$

$$=3+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$$

$$=3+\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}$$

$$=2^n+1$$

$a_1=3$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$\boldsymbol{a_n=2^n+1}$

[G]　$a_{n+1}-a_n=2^n$
2^n が階差数列の一般項になる。

[H]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq 2$ のとき，
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

第 5 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：4，ウ：1

[解説]

$a_{n+1}=4a_n-3$ を変形すると，

$$a_{n+1}-1=4(a_n-1)\ \text{[A]}$$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は，

初項 $a_1-1=6-1=5$，公比 4 の等比数列である。

したがって，

$$a_n-1=5\cdot4^{n-1}$$

求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n=5\cdot4^{n-1}+1}$$

[A]

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=4a_n-3 \\ -) & \quad\ \alpha=4\alpha-3 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=4(a_n-\alpha) \end{array}$$

ここで，$\alpha=1$ である。

2

[正解] エ：3，オ：2，カ：2

[解説]

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ を変形すると，

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)\ \text{[B]}$$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は，

初項 $a_1-2=5-2=3$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，

$$a_n-2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{2^{n-1}}+2}\ \text{[C]}$$

[B]

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1 \\ -) & \quad\ \alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+1 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{2}(a_n-\alpha) \end{array}$$

ここで，$\alpha=2$ である。

[C] $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：①，ウ：①，エ：⑥，オ：④，カ：⑥

[解説]

（証明）

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$　……(A)

[1]　$n=1$ のとき，【A】

(A)の（左辺）$=\mathbf{1}$，(A)の（右辺）$=\mathbf{1}$

より，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2$$

$n=k+1$ のとき，(A)より，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+\{2(\boldsymbol{k+1})-1\}$$
$$=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)$$
$$=\boldsymbol{k}^2+(2k+1)$$ 【B】
$$=(\boldsymbol{k+1})^2$$

よって，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，(A)はすべての自然数 n で成り立つ。

（証明終わり）

[A]　ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の 2 つのことを示す。
[1]　$n=1$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[B]　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)$ を k^2 に書き換える。

第6講 PART1 確認問題 解答

1

(1) **[正解]** アイ：10，ウエ：30，オカ：15

[解説]

確率変数 X のとりうる値は 0，1，2，3 [A]

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{10}{56}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{30}{56}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_5C_1}{{}_8C_3}=\frac{15}{56}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\boldsymbol{\frac{10}{56}}$	$\boldsymbol{\frac{30}{56}}$	$\boldsymbol{\frac{15}{56}}$	$\frac{1}{56}$	1

[A]　確率変数 X のとりうる値 x_1，x_2，……，x_n と，それぞれの値をとる確率 p_1，p_2，……，p_n の対応関係を，X の確率分布という。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

$p_1\geqq 0$，$p_2\geqq 0$，……，$p_n\geqq 0$

$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$

(2) **[正解]** キ：2，ク：7

[解説]

X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

よって

$$P(X\geqq 2)=P(X=2)+P(X=3)$$ [B]

$$=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\frac{16}{56}=\boldsymbol{\frac{2}{7}}$$

[B]　確率変数 X について
$X=a$ となる確率を $P(X=a)$
$a\leqq X\leqq b$ となる確率を $P(a\leqq X\leqq b)$
のように表す。

第6講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3

[解説]

Xの確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

よって，Xの期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}$$ [A]

$$=\frac{1}{9}(0\cdot4+1\cdot4+2\cdot1)$$

$$=\frac{6}{9}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

[A]　確率変数Xが下の表の確率分布に従うとき，期待値は

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

第 6 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：⑤，ウ：⑦

[解説]

確率変数 X のとりうる値は 1，2，3

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{12}{20}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

X の期待値は

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{20}+2\cdot\frac{12}{20}+3\cdot\frac{4}{20}=2$$ [A]

X の分散は

$$V(X)$$

$$=(1-2)^2\cdot\frac{4}{20}+(2-2)^2\cdot\frac{12}{20}+(3-2)^2\cdot\frac{4}{20}$$ [B]

$$=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$ [B]

（別解）　分散について

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$ [B]

$$=1^2\cdot\frac{4}{20}+2^2\cdot\frac{12}{20}+3^2\cdot\frac{4}{20}-2^2$$

$$=\frac{88}{20}-4=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

[A]　確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，期待値は

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

[B]　確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，X の期待値を $E(X)=m$ とすると，分散は

$$V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

または $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差は $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

第 6 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：③，ウ：④

[解説]

X の期待値，分散，標準偏差は

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{2}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{2}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{2}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

[A]

$$=\frac{20}{8}-\frac{25}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって

$$E(4X-3)=4E(X)-3$$

[B]

$$=4\cdot\frac{5}{4}-3=\mathbf{2}$$

$$V(4X-3)=4^2\,V(X)=4^2\cdot\frac{15}{16}=\mathbf{15}$$

$$\sigma(4X-3)=|4|\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{\mathbf{15}}$$

※$\sigma(4X-3)=\sqrt{V(4X-3)}=\sqrt{\mathbf{15}}$

> [A]　確率変数 X の分散は
> $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

> [B]　確率変数 X と定数 a，b について
> 期待値　$E(aX+b)=aE(X)+b$
> 分散　$V(aX+b)=a^2\,V(X)$
> 標準偏差　$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第7講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：6

[解説]

1回目と2回目に引いたカードに書かれた数をそれぞれ X, Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}$$

$$=3$$

同様に

$$E(Y)=3$$

したがって，カードに書かれた数の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3+3=6$$ [A]

[A]　2つの確率変数 X, Y について
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

2 [正解] イウエ：300

[解説]

表が出た500円硬貨，100円硬貨の枚数をそれぞれX枚，Y枚とすると，確率変数X，Yの確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(500X+100Y)$$ [B]

$$=500E(X)+100E(Y)$$

$$=500\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\mathbf{300}$$ **(円)**

[B]　2つの確率変数X，Yと定数a，bについて
$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** ア：3

[解説]

X, Y の期待値はそれぞれ

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{5}{9}+3\cdot\frac{2}{9}=2$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$

X, Y は独立より

$$E(XY)=E(X)E(Y)=2\cdot\frac{3}{2}=3$$ [A]

[A]　確率変数 X, Y が互いに独立であるとき
$E(XY)=E(X)E(Y)$

(2)　**[正解]** イウ：49

[解説]

$$E(X)=2$$

$$E\left(X^2\right)=1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{5}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{40}{9}$$

より，$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\dfrac{40}{9}-2^2=\dfrac{4}{9}$

$$E(Y)=\frac{3}{2}$$

$$E\left(Y^2\right)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{2}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$$

より，$V(Y)=E\left(Y^2\right)-\{E(Y)\}^2=\dfrac{19}{6}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{11}{12}$

X, Y は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{4}{9}+\frac{11}{12}=\mathbf{\frac{49}{36}}$$ [B]

[B]　確率変数 X, Y が互いに独立であるとき
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

(1) **[正解]** ア：③

[解説]

1回の試行で1が書かれた球を取り出す確率は $\dfrac{1}{4}$

この試行を3回繰り返すから，X は二項分布

$B\left(3,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。 [A]

[A]　1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

(2) **[正解]** イウ：27，エオ：27，カ：9，キ：1

[解説]

X は二項分布 $B\left(3,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。

$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}$$ [B]

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

であり

$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

$$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

$$P(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{1}{64}$	1

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X について，$X=r$ となる確率は，反復試行の確率の式より

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{n-r}$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** ア：③

[解説]

さいころを1回投げて偶数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

この試行を400回繰り返すから，X は二項分布

$B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって

$$E(X)=400\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{200}$$ [A]

[A]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき
　期待値　$E(X)=np$

(2)　**[正解]** イ：⑥，ウ：②

[解説]

X は二項分布 $B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって

$$V(X)=400\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{100}$$ [B]

$$\sigma(X)=\sqrt{100}=\mathbf{10}$$

[B]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
　分散　$V(X)=npq$
　標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

第 9 講　PART1 確認問題 解答

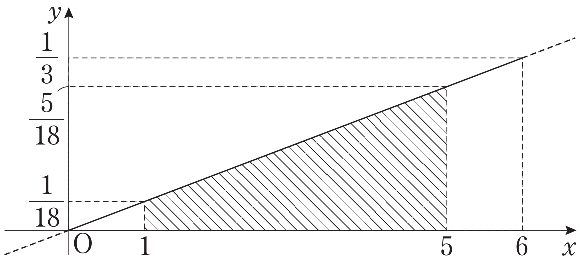
1

(1)　**[正解]** ア：2，　イ：3

[解説]

$$P(1 \leqq X \leqq 5) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right)\cdot 4 \quad \text{[A]}$$

$$= \frac{12}{18} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$



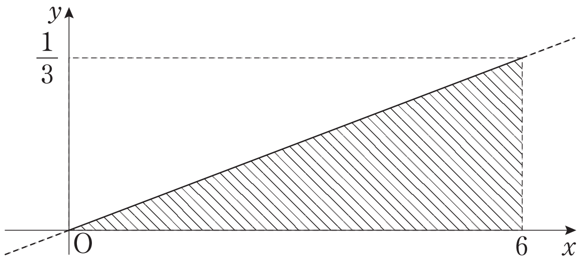
[A]　連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると，$P(a \leqq X \leqq b)$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を表す。

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)dx$$

(2)　**[正解]** ウ：1

[解説]

$$P(0 \leqq X \leqq 6) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{1} \quad \text{[B]}$$



[B]　X のとりうる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ のとき

$$P(\alpha \leqq X \leqq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$$

第 9 講　PART2 確認問題 解答

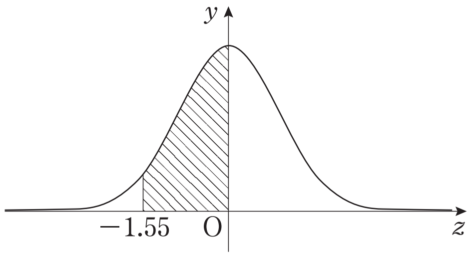
1

(1)　**[正解]** アイウエ：4394

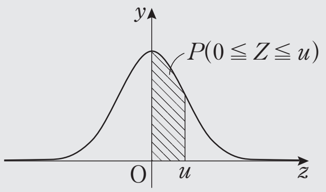
[解説]

$P(-1.55 \leqq Z \leqq 0) = P(0 \leqq Z \leqq 1.55)$ [A]

$= \mathbf{0.4394}$



[A]　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。
分布曲線が $z=0$（y 軸）に関して対称であることに注目。



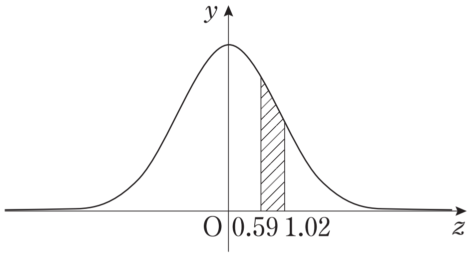
(2)　**[正解]** オカキク：1237

[解説]

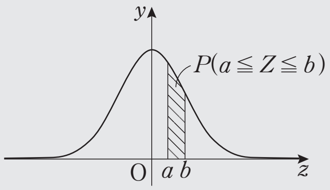
$P(0.59 \leqq Z \leqq 1.02)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.02) - P(0 \leqq Z \leqq 0.59)$ [B]

$= 0.3461 - 0.2224 = \mathbf{0.1237}$



[B]　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(a \leqq Z \leqq b)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。



第 9 講　PART3 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]アイ**：53

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N\left(26,\ 4^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。 [A]

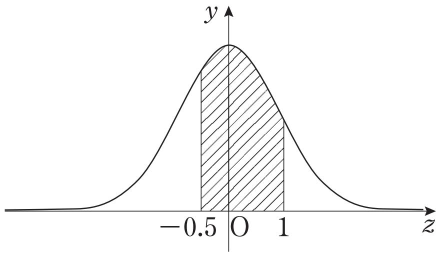
$X=24$ のとき $Z=-0.5$

$X=30$ のとき $Z=1$

よって

$$\begin{aligned}&P(24 \leqq X \leqq 30)\\&=P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)\\&=P(-0.5 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\&=P(0 \leqq Z \leqq 0.5)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\&=0.1915+0.3413=0.5328\end{aligned}$$

したがって，**約 53%** いる。



[A]　確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(2)　**[正解]** ウ：7

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N\left(26,\ 4^2\right)$ に従う。

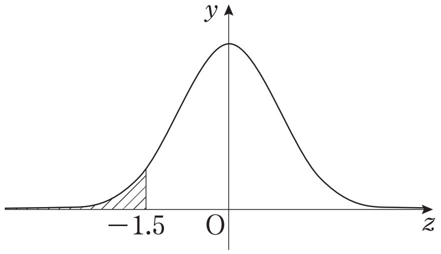
$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。[B]

$X=20$ のとき $Z=-1.5$

よって

$$\begin{aligned} P(X \leqq 20) &= P(Z \leqq -1.5) \\ &= P(Z \geqq 1.5) \\ &= 0.5-P(0 \leqq Z \leqq 1.5) \\ &= 0.5-0.4332=0.0668 \end{aligned}$$

したがって，**約 7%** いる。



[B]　確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

第 9 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイウエ：9772

[解説]

1の目が出る回数を X とすると，X は二項分布

$B\left(500,\ \frac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=500\cdot\frac{1}{6}=\frac{250}{3}$$ [A]

$$V(X)=500\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{625}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3}$$

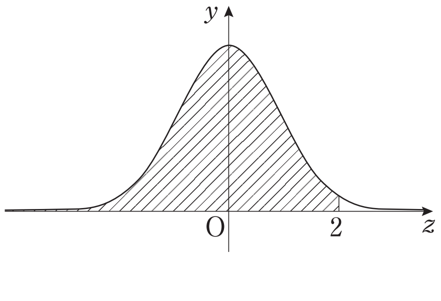
$n=500$ は十分に大きいから，X は正規分布

$N\left(\frac{250}{3},\ \left(\frac{25}{3}\right)^2\right)$ に従うとみなしてよい。 [B]

ここで，$Z=\dfrac{X-\frac{250}{3}}{\frac{25}{3}}=\dfrac{3X-250}{25}$ とすると，Z は

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}&P(X\leqq 100)\\&=P(Z\leqq 2)\\&=P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=P(Z\geqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=0.5+0.4772=\mathbf{0.9772}\end{aligned}$$



[A]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
$E(X)=np$，$V(X)=npq$，
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$

第10講　PART1 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** アイ：20，ウエ：30，オカ：50

[解説]

母集団分布は下の表のようになる。 [A]

X	10	5	1	計
P	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{50}{100}$	1

[A]　母集団から1個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき，X の確率分布を「母集団分布」という。

(2)　**[正解]** キ：4，クケ：12，コ：2，サ：3

[解説]

母集団分布は下の表のようになる。

X	10	5	1	計
P	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{50}{100}$	1

母平均は

$$m = 10\cdot\frac{20}{100}+5\cdot\frac{30}{100}+1\cdot\frac{50}{100}$$ [B]

$$=\frac{400}{100}=\mathbf{4}$$

母分散は

$$\sigma^2=\left(10^2\cdot\frac{20}{100}+5^2\cdot\frac{30}{100}+1^2\cdot\frac{50}{100}\right)-4^2$$

$$=\frac{2800}{100}-16=\mathbf{12}$$

母標準偏差は

$$\sigma=\sqrt{12}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

[B]　母集団から1個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき，

母平均 $m=E(X)$

母分散 $\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

母標準偏差 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{V(X)}$

第10講　PART2 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** アイ：58，ウ：2

[解説]

$\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=58$　[A]

標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\dfrac{10}{\sqrt{25}}=2$

[A]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の
期待値 $E(\overline{X})=m$
標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2)　**[正解]** エ：⑥

[解説]

$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(58,\ \dfrac{10^2}{225}\right)$，

すなわち　正規分布 $N\left(58,\ \dfrac{4}{9}\right)$ に従う。　[B]

$\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-58}{\dfrac{2}{3}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$P(57.5\leqq \overline{X}\leqq 58.5)=P(-0.75\leqq Z\leqq 0.75)$$
$$=2P(0\leqq Z\leqq 0.75)$$
$$=2\cdot 0.2734=\mathbf{0.5468}$$

[B]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

第10講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：③

[解説]

標本平均は $\overline{X}=53.4$，母標準偏差は $\sigma=2.5$，標本の大きさは $n=400$ より，母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$53.4-1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}\leqq m\leqq 53.4+1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}$$ [A]

$$53.4-1.96\cdot\frac{1}{8}\leqq m\leqq 53.4+1.96\cdot\frac{1}{8}$$

$$53.155\leqq m\leqq 53.645$$

よって，母平均は信頼度95%で **53.2g 以上 53.6g 以下**と推定される。

[A]　母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

第10講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

対立仮説 H_1 は「新商品を好む人は従来の商品を好む人よりも多い」である。

帰無仮説 H_0 は「新商品と従来の商品を好む人の人数は変わらない」である。

H_0 が正しいとするとき，新商品を選ぶ人数を X とすると，X は二項分布 $B\left(256,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=256\cdot\frac{1}{2}=128$$

$$\sigma=\sqrt{256\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=8$$

$n=256$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(128,\ 8^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-128}{8}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=142$ のとき，$Z=1.75$ であるから，256 人中 142 人以上が新商品を選ぶ確率は，正規分布表より

$$\begin{aligned}P(X\geqq 142)&=P(Z\geqq 1.75)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.75)\\&=0.5-0.4599=0.0401\end{aligned}$$

つまり，約 4%であり，有意水準 5%に比べて小さい。 [A]

よって，帰無仮説 H_0 を棄却できる。

したがって，**新商品を好む人の方が多いと判断できる。**

[A]　帰無仮説のもとで，標本調査の結果，またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。その確率が
- 有意水準以下の場合
  ⇒ H_0 を棄却できる
  （H_1 が正しいと判断できる）
- 有意水準より大きい場合
  ⇒ H_0 を棄却できない
  （H_1 が正しいとは判断できない）

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。